
FONDO PROVINCIA



ELEMENTI

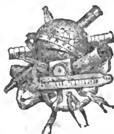
DI

ARITMETICA

DI

F. AMANTE

SETTIMA EDIZIONE



NAPOLI
DALLA STAMPERIA DI SAVERIO GIORDANO
1865.

In questa ristampa fatta dai figli del defunto Professore Amante si sono ritenuti tutti i miglioramenti e le aggiunzioni arrecate dall'Autore alle precedenti edizioni, e si è posta ogni cura e diligenza per renderla purgata da errori.

ELEMENTI

DI ARITMETICA

SEZIONE PRIMA

Calcolo di ogni maniera di numeri.





CAPO I.

NOZIONI PRELIMINARI.

Distinzione delle diverse specie di grandezze, o quantità.

§.° 1. *Grandezza, o quantità* si chiama tutto ciò che è capace di essere accresciuto o diminuito. Per esempio, una compagnia di soldati può essere accresciuta aggiungendovi altri soldati, e può essere anche diminuita togliendone alcuni. Dunque quella compagnia o unione di soldati, che si chiama *numero* di soldati, è capace di aumento o di diminuzione, ed è perciò una grandezza. Una strada in città può allargarsi tagliando una porzione delle fabbriche vicine, e può restringersi avanzando in vece nuove fabbriche in mezzo della medesima. Dunque la larghezza della strada è capace di aumento o di diminuzione, ed è pure una quantità.

§. 2. Vi sono in generale due specie di grandezze o quantità; la quantità *continua*, e la quantità *discreta*.

S' intende per quantità *continua* quella in cui si considera soltanto la estensione continuata e non interrotta delle parti; come sarebbe una piazza, una strada, un campo, in cui si riguarda l' ampiezza soltanto, o l' estenzione.

S' intende per quantità *discreta* quella che si considera come l' unione di più parti uguali o di più cose simili, e si chiama *numero*; come sarebbe il numero delle miglia comprese nella distanza fra due luoghi, o il numero de' ducati che compongono una somma di danaro.

La *Geometria* si occupa delle quantità continue, e l' *Aritmetica* si occupa delle quantità discrete, ossia de' numeri.

Del sistema di numerazione.

§. 3. Essendo il numero l' unione, o l' aggregato di più cose simili, si chiama *unità* una delle cose simili che lo compongono, e perciò il numero si considera come l' unione di molte unità. Questa unione di unità potendo essere più o meno grande, ed essendo capace anche di crescere indefinitamente, è chiaro che vi sono moltissimi, ed anzi infiniti numeri fra loro diversi. Per distinguerli uno dall' altro, e per giudicare della loro grandezza rispettiva, è necessario indicarli con parole, e con cifre scritte corrispondenti alle parole; ma non potendosi adoperare infinite parole ed infinite cifre per rappresentarli, convien servirsi di poche cifre e di poche parole, e procurare di combinarle in modo che possano facilmente rappresentare qualunque numero.

§. 4. *Sistema di numerazione* si chiama appunto la *convenzione*, ossia il generale accordo de' dotti che stabilisce quelle parole, e quelle cifre principali, ed il modo ancora di farne uso, per esprimere con esse qualunque numero. Le cifre principali e le loro denominazioni sono le seguenti:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
uno,	*due,*	*tre,*	*quattro,*	*cinque,*	*sei,*	*sette,*	*otto,*	*nove.*

La prima corrisponde all'unità, e le altre rappresentano unioni, o collezioni di unità gradatamente maggiori, dimodochè ognuna di esse supera la precedente di una unità.

§. 5. Se all' ultimo numero *nove* si aggiunge un'unità, si avrà un altro numero che si esprime con la parola *dieci*, e corrisponde al numero delle dita che contiamo nelle due mani. Questo numero ha servito mirabilmente a combinare le nove cifre precedenti nel modo più semplice e breve per esprimere tutti i numeri immaginabili, ed è considerato perciò come il fondamento del nostro sistema di numerazione, il quale prende da esso il nome di sistema *decimale* di numerazione.

§. 6. Si è stabilito che un' unità situata alla sinistra di un'unità semplice debba valere dieci volte l' unità semplice, ossia debba uguagliare l'unione di dieci unità semplici; una terza unità situata alla sinistra della seconda, debba valere dieci volte la seconda, e così di seguito.

Si sono formate dunque diverse specie o classi di unità crescenti dalla destra verso la sinistra, che si distinguono co' nomi quì sotto notati.

1	1	1	1	1	1
centinajo di migliaja	*decina di migliaja*	*migliajo*	*centinajo*	*decina*	*unità*

Per tal modo componendo un numero con più cifre una vicina all'altra, questo numero sarà la collezione di diverse specie di unità, delle quali ognuna vale dieci volte la sua vicina a destra, e dicesi *decupla* della medesima. Per esempio, il numero 327 composto di tre cifre, contiene *sette* unità, *due* decine, e *tre* centinaja, le quali si considerano tutte riunite, e formanti un solo insieme, o come suol dirsi, un *sol tutto*.

§. 7. A ciascuna classe o specie di unità appartengono nove numeri come alla classe delle unità semplici. Così le decine possono essere una, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, e nove; nè possono essere più di nove, perchè un numero composto di dieci decine prende il nome di centinajo. Lo stesso vale per le centinaja, per le migliaja ecc. Questi nove numeri si distinguono, per le varie classi di unità, coi seguenti nomi;

Per le decine i nomi sono:
dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, e novanta.

Per le centinaja,
cento, duecento, trecento........novecento.

Per le migliaja,
mille, duemila, tremila........novemila.

Per le decine di migliaja, e centinaja di migliaja,
diecimila, ventimila, trentamila........novantamila.
centomila, duecentomila, trecentomila....novecentomila.

§. 8. Un numero composto di più cifre appartenenti a diverse classi si nomina riunendo insieme i nomi particolari delle cifre che contiene. Per esempio il numero precedente 327, si nomina *trecento ventisette*; il numero 35271, si nomina *trentacinquemila duecento settantuno*, e così di altri. Solamente i nomi di alcuni numeri di due cifre si compongono in un modo particolare; il numero 11 si nomina *undici* in vece di *dieci-uno*, ed i numeri 12, 13, 14, 15, 16, si nominano *dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici*.

§. 9. Estendendo le classi delle unità al di là delle centinaja di migliaja, con lo stesso principio che una nuova unità debba sempre esser decupla della sua vicina a destra, la settima cifra prende il nome di *milione*. Le unità seguenti, cioè l'ottava, la nona etc. sino alla dodicesima inclusivamente, si distinguono usando le denominazioni di sopra indicate per le prime sei cifre coll'aggiunta della parola *milione*. Così i numeri del settimo, ottavo, nono etc. luogo saranno espressi come segue:

Un milione, due milioni, tre milioni......
Dieci milioni, venti milioni, trenta milioni......
Cento milioni, duecento milioni......
Mille milioni, duemila milioni, etc.

L'unità situata nel tredicesimo luogo prende il nome di *bilione*. Appartengono al bilione sei cifre come al milione, le quali si distinguono sempre colle denominazioni usate per le prime sei cifre, aggiungendo la parola *bilione*. Lo stesso vale pel *trilione*, pel *quatrilione* etc.

§. 10. Si concepisce facilmente come queste denominazioni bastino per esprimere qualunque numero. Non bastano però a scriverlo le nove cifre sopra riportate. In fatti può darsi il caso che un numero composto di

più cifre non contenga unità di una certa classe : per esempio il numero trecento e sette contiene tre centinaja e sette unità semplici , senza decine. Allora se si scrivesse colle sole due cifre 37 senz' altro , si leggerebbe *trentasette*. Per supplire a questa mancanza si è immaginata la cifra, 0, che si pronunzia *zero* , e non ha alcun valore , ma serve soltanto a conservare alle diverse cifre il loro luogo. Così il numero trecento e sette si scriverà 307. Mancando le unità di molte classi, si suppliranno sempre con altrettanti zeri. In questo modo si scriveranno i numeri,

dieci, cento, mille, diecimila etc.
 10, 100, 1000, 10000, e simili.

Le prime nove cifre si chiamano *significative* per distinguerle dalla cifra *zero* che non ha alcun valore.

Maniera di leggere un numero.

§. 11. Per leggere un numero si separano le sue cifre da sei in sei con virgole , cominciando dalla destra. Ogni gruppo di sei cifre contiene le unità, le decine, le centinaja, le migliaja, le decine di migliaja, e le centinaja di migliaja di una medesima denominazione , e le denominazioni sono quelle accennate di sopra, cioè :

1.° gruppo........*unità*.
2.° gruppo........*milioni*.
3.° gruppo........*bilioni*.
4.° gruppo........*trilioni etc.*

come si osserva nel numero,

trilioni bilioni milioni unità
4·351,607·200, 925·021, 003·005

che si pronunzia *quattromila trecento cinquantuno trilioni, seicento settemila e duecento bilioni, novecento venticinque mila e ventuno milioni, tremila e cinque* (*).

È da osservarsi ancora che in ogni gruppo di sei cifre le prime tre a sinistra si leggono come se fossero sole, aggiungendo soltanto la parola *mila*. Così il numero 425·330 si legge *quattrocentoventicinque* mila e *tre-*

(*) Il sistema di numerazione esposto qui sopra è quello usato generalmente in Italia. I francesi, ritenendo le stesse cifre e la stessa convenzione nel combinarle , cambiano però le denominazioni da tre in tre cifre invece di cambiarle da sei in sei. Così essi considerano il *migliajo* come una denominazione da non più riprodursi ; dopo il migliajo alla settima cifra viene il *milione* , dopo il milione alla decima cifra viene il *bilione*, alla tredicesima il *trilione* etc. Secondo questo sistema ogni denominazione ha tre cifre in vece di sei; e quindi non si contano se non *unità decine centinaja* di milioni, *unità decine e centinaja* di bilioni , e così di seguito. Il numero considerato qui sopra sarebbe, col sistema francese, distribuito in gruppi di tre cifre come segue

$$4^{vi},351^{v},607^{iv},200^{iii},925^{ii},021^{i},003^{m},005$$

e si leggerebbe, *quattro sestilioni , trecento cinquantuno quintilioni, seicento e sette quatrilioni, duecento trilioni, novecento venticinque bilioni, ventuno milioni, tremila e cinque.*

centotrenta; dimodochè la lettura di un numero qualunque si riduce in fine alla lettura di un numero di tre cifre.

§. 12. Dopo di essersi perfettamente addestrati a leggere qualunque numero, non è difficile anche scriverlo sotto la dettatura, e basta per ciò ricordarsi che ad ogni denominazione competono sei cifre, per cui bisogna supplire con zeri quei luoghi che, dall' enunciazione del numero, si conosce che rimangono vuoti di cifre significative. È chiaro poi che le cifre del primo gruppo a sinistra, dalle quali si comincia sempre a leggere o a scrivere il numero, non è necessario che sieno sei, come quelle degli altri gruppi.

Maniera di scrivere i numeri usata dagli antichi romani.

§. 13. I romani non avevano cifre apposite per la scrittura de'numeri, ma usavano le lettere del loro alfabeto disposte in un modo convenuto. Ecco i numeri principali con la loro corrispondenza in cifre arabe;

I , V , X , L , C , IƆ , CIƆ , IƆƆ , CCIƆƆ. etc.
1 , 5 , 10 , 50 , 100 , 500 , 1000 , 5000 , 10000

Con questi caratteri indicavano anche tutti i numeri intermedi, servendosi di un' altra convenzione, cioè che un carattere di eguale o di minor valore posto dopo s' intendeva aggiunto, e posto innanzi s' intendeva sottratto, come qui sotto,

II , III , IV , VI , VII , VIII , IX , XI , XII , XIV , XV , XVI , XIX ,
2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9 , 11 . 12 , 14 , 15 , 16 , 19 ,
XX , XXX , XL , LX , XC , CX , CXX , CXLVII , CIƆIƆCCCXLIV,
20 , 30 , 40 , 60 , 90 , 110 , 120 , 147 , 1844.

Alle cifre IƆ , CIƆ indicanti 500, e 1000 si sono anche sostituite le lettere D , M , dimodochè il numero 1844 si scriverebbe pure così , MDCCCXLIV.

Cosa sia un numero astratto, ed un numero concreto.

§. 14. Numeri *astratti* sono quelli che rappresentano una collezione di unità di cui non si conosce, o non si è stabilita la natura, o la specie. Così quando si pronunzia *duecento e tre* senza aggiungere altro, s' intende una collezione di duecento e tre unità di qualità o specie non conosciuta, e questo numero si chiama *astratto*; ma quando si dice duecento e tre uomini, duecento e tre ducati etc. , allora la specie dell' unità è l' uomo, il ducato etc. , ed il numero si chiama *concreto*.

CAPO II.

OPERAZIONI SU I NUMERI INTERI.

Dell' addizione de' numeri interi.

§. 15. L' *addizione* è quella operazione che ha per oggetto di riunire più numeri in un solo.

Le addizioni de' numeri di una sola cifra sono facili ad eseguirsi a memoria con un poco di pratica. Per agevolare ai fanciulli questo esercizio sarà utile la tavola quì sotto riportata, nella quale i risultamenti delle addizioni successive di un numero della prima colonna con tutti quelli posti sulla stessa linea orizzontale, si trovano registrati in piedi delle colonne seguenti (*).

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5	16	17
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9									1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

§. 16. Quando i numeri da aggiungersi sono composti di più cifre, è chiaro che l'addizione dovrà eseguirsi aggiungendo fra loro le unità della stessa classe; cioè le unità semplici si aggiungeranno alle unità semplici, le decine alle decine, le centinaja alle centinaja, le migliaja alle migliaja etc.

In questo modo l'addizione de' numeri composti di più cifre non è che

(*) Si poteva dare alle somme de' numeri semplici la stessa disposizione che hanno i prodotti nella tavola pitagorica. Ma abbiamo preferito il quadro precedente perchè mostra tutte le maniere di comporre un numero con l'addizione di due numeri più piccoli.

una ripetizione dell' addizione de' numeri di una sola cifra, come si vede nell' esempio;

$$\begin{array}{r} 423 \\ 214 \\ 322 \\ \hline 959 \end{array}$$

Il risultamento dell' addizione dicesi *somma*; così il numero 959 è la somma de' tre numeri 423, 214, e 322.

§. 17. Ma può accadere che la somma delle unità semplici sorpassi il numero 9; allora essa sarà composta di due cifre, e conterrà una o più decine, e queste ultime appartenendo al secondo luogo, dovranno aggiungersi alla somma delle decine. Se anche la somma delle decine sorpassa il 9, allora è segno che contiene qualche centinajo, e dovrà questo aggiungersi alla somma delle centinaja; e così di seguito. Tutto ciò si rende manifesto nell' esempio:

	429
	86
	927
Somma delle unità.......	22
delle decine......	12
delle centinaia...	13
Somma totale............	1442

Ma invece di scrivere le decine provenienti dalla somma delle unità, e le centinaja risultanti dalla somma delle decine, per poi tenerne conto nella somma totale, si potrà pervenire più presto a quest' ultimo risultamento, ritenendo a memoria quelle decine e quelle centinaja, ed aggiungendole rispettivamente ai numeri che si ottengono dall' addizione delle decine e da quella delle centinaja, come si osserva qui appresso;

$$\begin{array}{r} 429 \\ 86 \\ 927 \\ \hline 1442 \end{array}$$

§. 18. Dunque la regola per eseguire l' addizione sarà la seguente: *Scrivete i numeri da sommarsi gli uni sotto gli altri, situando le unità della stessa classe in una medesima colonna, e tirate una linea sotto l' ultimo numero per separarlo dal risultamento. Sommate i numeri contenuti in ciascuna colonna, cominciando dalla destra; se la somma non sorpassa il 9, scrivetela come l' avete ottenuta, e se contiene una o più decine, ritenetele a memoria per riunirle ai numeri della colonna seguente. Finalmente scrivete la somma dell' ultima colonna come risulta dall' operazione.*

Della sottrazione de' numeri interi.

§. 19. La *sottrazione* è un' operazione che ha per oggetto di togliere un numero da un altro. Il numero maggiore si chiama *sottraendo*, ed il minore *sottrattore*.

La sottrazione de' numeri di una sola cifra è facile ad eseguirsi a memoria. Per rendere più agevole agli allievi questo esercizio si può far uso della stessa tavola adoperata per l'addizione. Nei numeri composti di più cifre si sottraggono le une dalle altre le unità della stessa classe, e così questa operazione non è che una ripetizione della sottrazione dei numeri di una sola cifra: si sottraggono dunque le unità dalle unità, le decine dalle decine etc.

§. 20. Ma può accadere che il numero da sottrarsi in una colonna qualunque sia maggiore di quello da cui deve togliersi. Allora si farà come nell'esempio seguente;

$$\begin{array}{r} 4063 \\ 387 \\ \hline 3676 \end{array}$$

Non potendo togliersi il 7 dal 3 si aggiunge a questo numero una decina impronta dalla seconda colonna, considerando il numero superiore 4063 decomposto ne' due numeri 4050, e 13. Così il 7 potrà sottrarsi dal 13, e rimarrà 6. Si verifica lo stesso inconveniente nella sottrazione delle cifre della seconda colonna, perchè da 5 non può togliersi 8, e bisognerà improntare un'unità dalla terza colonna. Ma la terza colonna non avendo cifre significative, bisogna ricorrere alla quarta, supponendo il numero 405 spezzato in due, cioè 390 e 15. Per tal modo dalle 15 decine potranno togliersi le 8 del numero inferiore, e dalle rimanenti 9 centinaja del numero superiore si toglieranno pure in seguito le 3 centinaja del numero inferiore.

§. 21. Dopo di ciò la regola della sottrazione sarà la seguente: *Situate il numero minore sotto al maggiore, e tirate una linea per separarlo dal risultamento. Sottraete il numero di ciascuna colonna dal suo superiore cominciando dalla destra, e quando ciò non possa eseguirsi, aumentate la cifra del sottraendo di una decina presa dalla colonna seguente. Nel caso che vi siano zeri intermedi, considerateli come 9, e diminuite di una unità la prima cifra significativa a sinistra degli zeri medesimi.*

Il risultamento della sottrazione di un numero da un altro dicesi *resto*, ed in alcuni casi prende anche il nome di *eccesso*, e di *differenza*.

Si chiama *resto* quando con la sottrazione si vuol conoscere ciò che rimane da un dato numero togliendone un altro più piccolo. Per esempio una persona aveva in tasca 10 ducati; ne ha spesi 7 e vuol sapere ciò che gli è rimasto. Fatta la sottrazione, il *resto* del denaro è 3. Si chiama *eccesso* quando paragonando fra loro due numeri si vuol conoscere per mezzo della sottrazione di quanto uno è maggiore dell' altro. Così misurando la statura di due soldati, si vuol sapere quanto uno e più alto dell'altro. Il primo e alto sei palmi, ed il secondo cinque, e quindi l'*eccesso* dell' altezza del primo su quella del secondo è un palmo. Finalmente si chiama *differenza* allorchè nel paragonare fra loro due numeri, non si giudica se non della ineguaglianza di essi. Così nell'esempio addotto non si cerca sapere quale de'due soldati sia più alto, ma solo la disparità delle loro altezze. Le altezze essendo 6, e 5 palmi, si dirà che la loro *differenza* è un palmo.

§. 22. Il resto di una sottrazione può essere diminuito con diminuire il sottraendo o con accrescere il sottrattore; ed essere accresciuto con accrescere il sottraendo, o diminuire il sottrattore. Questa osservazione semplicissima rende ragione di un'altra maniera di eseguire la sottrazione quando la cifra del sottrattore è maggiore di quella del sottraendo.

Nell' esempio precedente s' incomincia l' operazione dicendo; da 13 tolto 7 rimane 6, e per continuare la sottrazione sulle decine del sottraendo, in vece di considerarle diminuite dell' unità improntata, si aggiunge quella unità alle decine del sottrattore, e si dice, da 16 tolto 9 rimane 7; similmente passando alle centinaja, non si considera la cifra del sottraendo come 9, ma quella del sottrattore come 4, e si toglie 4 dal 10. Rimane finalmente 3 fra le migliaja del sottraendo, e si abbassa nel resto. Questa maniera di operare si usa con vantaggio per rendere più semplice la *divisione*, siccome si vedrà in seguito.

Della ripruova dell' addizione, e della sottrazione.

§. 23. Se dopo aver eseguita l' addizione di più numeri, dalla somma ottenuta si sottraggono una dopo l' altra le somme parziali di cui è composta, cioè la somma delle unità, quella delle decine, quella delle centinaja etc. , è chiaro che, quando l' operazione sia ben fatta, non dovrà rimaner nulla. Le sottrazioni si cominceranno dalla sinistra per maggior facilità. Così, per fare la ripruova dell'addizione eseguita nel §. 17, dalle 14 centinaja della somma totale si toglierà la somma 13 delle centinaja

	429
	86
	927
Somma totale........	1442
Idem delle centinaja.	13
	14
delle decine...	12
	22
delle unità...	22
	00

contenute nella prima colonna a sinistra. Al resto 1 mettendo a fianco le decine della somma totale si avrà 14, da cui tolta la somma delle decine contenute nella seconda colonna, si otterrà per secondo resto 2. A questo ponendo a fianco le unità della somma totale si avrà 22, da cui sottratta la somma delle unità contenute nella terza colonna, si otterrà per ultimo resto *zero*. L' operazione dunque era ben fatta.

§. 24. Per la ripruova della sottrazione, è evidente che il sottrattore aggiunto al resto deve dare il sottraendo, il quale può considerarsi composto del sottrattore, e del resto. Perciò la ripruova della sottrazione si esegue per mezzo dell' addizione.

Esempio.

	4270
	329
Resto	3941
Sottrattore	329
Somma , o sottraendo	4270

È da avvertire però che le operazioni qui indicate per la ripruova dell'addizione e della sottrazione si fanno a memoria, senza scrivere altri numeri oltre quelli necessari per le operazioni dirette, al che si perviene facilmente con un poco di pratica.

Della moltiplicazione de' numeri interi.

§. 25. La *moltiplicazione* de' numeri interi è un'abbreviazione dell'addizione, quando i numeri da aggiungersi sono fra loro eguali.
Per esempio debba eseguirsi l'addizione,

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

Questa operazione consiste nel ripetere il numero 16 quattro volte, e si esegue più brevemente colle regole della moltiplicazione.

§. 26. In una moltiplicazione si distinguono tre numeri: il *moltiplicando* che è il numero da ripetersi, il *moltiplicatore* che indica quante volte deve ripetersi, ed il *prodotto* ch'è il risultamento della operazione. Nell'esempio proposto 16 è il moltiplicando, 4 è il moltiplicatore, e 64 è il prodotto.

In generale; *nella moltiplicazione il prodotto si ottiene ripetendo tante volte il moltiplicando, quante unità si contano nel moltiplicatore:* o ciò che vale lo stesso, *il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando, nello stesso modo che il moltiplicatore si forma per mezzo dell' unità.* Nell' esempio precedente il moltiplicatore 4 si forma dall' unione o dalla somma di *quattro* unità, ed allo stesso modo, il prodotto 64 si forma dall' unione o dalla somma di *quattro* 16, ossia di quattro volte il moltiplicando.

§. 27 Un numero che si ottiene da un altro ripetuto due volte si chiama *doppio* del medesimo. Così ripetendo due volte il numero 4, si ha il numero 8 che dicesi *doppio* del 4; ed è chiaro ancora che il numero 8 *contiene* in sè stesso, o comprende due volte il 4, e che quest' ultimo è *contenuto* o compreso due volte nell' 8. Se un numero si ottiene da un altro ripetuto *tre* volte, ossia se un numero contiene un altro *tre* volte, si chiama *triplo* di quello, se lo contiene *quattro* volte, dicesi *quadruplo*; *cinque* volte, *quintuplo* etc. Per esempio 6 è doppio di 3, e triplo di 2, e 20 è doppio di 10, quintuplo di 4, e *decuplo* di 2.

Da quanto precede si può conchiudere che *nella moltiplicazione* il prodotto *è doppio, triplo, quadruplo, etc. del* moltiplicando, *se il* moltiplicatore *è in corrispondenza doppio, triplo, quadruplo etc. dell'* unità; *e se il moltiplicatore è uguale all' unità, il prodotto è eguale al moltiplicando.*

Il moltiplicando ed il moltiplicatore si chiamano *fattori* del prodotto; così 16, e 4 sono i fattori del 64.

§. 28. La moltiplicazione de'numeri offre tre casi: 1.° la moltiplicazione di due numeri di una sola cifra: 2.° la moltiplicazione di un numero di più cifre per un numero di una sola cifra: 3.° la moltiplicazione di un numero di più cifre per un altro numero di più cifre.

1.° La moltiplicazione de'numeri di una sola cifra è facile ad eseguirsi per mezzo della seguente tavola detta di Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Per formare questa tavola si scrivono in una linea orizzontale i numeri

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ;

si aggiunge poi ciascun numero con sè stesso, e si forma una seconda linea; la somma de' numeri della prima e della seconda linea darà la terza linea; e quella de'numeri della prima e della terza darà la quarta, e così di seguito. Per tal modo ogni numero della seconda linea corrisponde a ciascun numero della prima ripetuto due volte; ogni numero della terza linea corrisponde a quello della prima ripetuto tre volte etc. L' uso della tavola è molto facile.

§. 29. Nella tavola di Pitagora si osserva che *il prodotto di un numero per un altro rimane lo stesso, se si prende il moltiplicatore per moltiplicando, ed il moltiplicando per moltiplicatore.* Per esempio, il prodotto di 3 per 5 è lo stesso di quello di 5 per 3; cioè cinque ripetulo tre volte, è lo stesso che 3 ripetuto cinque volte. Per dar ragione di questo fatto, si dispongano in una linea orizzontale le unità contenute nel numero 5, e si scrivano due linee simili al di sotto; si avranno così disposte in un quadro tutte le unità contenute nel prodotto 15.

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

Ora, si vede che contando le linee orizzontali, il prodotto o il quadro risulta dal 5 ripetuto tre volte, e contando le colonne verticali, lo stesso quadro risulta dal 3 ripetuto cinque volte: e però 5 ripetuto tre volte è la medesima cosa di tre ripetuto cinque volte.

§. 30. 2.° Per moltiplicare un numero di più cifre per un numero di una sola cifra, si prenda per esempio la moltiplicazione di 267 per 4; la

operazione da eseguirsi è quella di ripetere il numero 267 quattro volte, ed è chiaro che bisognerà ripetere quattro volte le unità, quattro volte le decine e quattro volte le centinaja che sono in quel numero, e sommare i risultamenti che se ne ottengono. La moltiplicazione potrebbe dunque farsi come segue,

```
 267
   4
 ———
  28
 24
 8
————
1068
```

Ma in vece di scrivere tre prodotti, si potrà scriverne un solo, ritenendo a memoria le decine ottenute dal primo prodotto dalle unità semplici, per aggiugnerle al prodotto delle decine, e ritenendo a memoria le centinaja ottenute dal prodotto delle decine, per unirle al prodotto delle centinaja. L'operazione abbreviata sarà,

```
 267
   4
————
1068
```

§. 31. Prima di passare al 3.° caso della moltiplicazione, vediamo come potrebbe moltiplicarsi il numero 267 per 40. Moltiplicare 267 per 40 significa ripeterlo quaranta volte, o sia dieci volte quattro. Per ripetere il numero 267 quattro volte si userà la regola precedente, e si otterrà 1068. Questo prodotto deve ora ripetersi 10 volte, il che si ottiene subito aggiungendovi uno zero, poichè allora le unità diventano decine, le decine diventano centinaja, le centinaja diventano migliaja e le migliaja decine di migliaja, onde ogni cifra del numero 1068 rimane moltiplicata per 10. Se il numero 267 dovesse moltiplicarsi per 400, lo stesso ragionamento ci farebbe conoscere che dovrebbe moltiplicarsi per 4, e poi aggiungervi due zeri. E se il numero dovesse moltiplicarsi per 4000, si moltiplicherebbe prima per 4 e poi vi si aggiugnerebbero tre zeri, e così di seguito. Si opererebbe allo stesso modo se dovesse moltiplisarsi un numero per 30, per 300, o per 3000 etc., e per qualunque altra cifra significativa seguita da uno o più zeri.

§. 32. 3.° Sia da moltiplicarsi il numero 267 per 324. Bisognerà ripetere il numero 367 trecento ventiquattro volte, cioè trecento volte, più venti volte, più quattro volte. Dovrà per conseguenza moltiplicarsi il 267 prima per 4, poi per 20, indi per 300, e sommare i tre prodotti ottenuti. Questa operazione dopo ciò che si è detto finora non ha alcuna difficoltà, e si eseguirà come quì appresso.

Moltiplicando.	267
Moltiplicatore.	324
1.° *Prodotto parziale . . .*	1068
2.° *Prodotto parziale . . .*	5340
3.° *Prodotto parziale . . .*	80100
Prodotto totale. . . . :	86508

dove possono omettersi senza inconveniente gli zeri situati alla destra

del 2.° e del 3.° prodotto parziale, purchè le cifre significative de' prodotti medesimi siano collocate nel proprio luogo.

§. 33. Allorchè il moltiplicando contiene uno o più zeri alla dritta, si tralasceranno per brevità nell'eseguire la moltiplicazione, ma si aggiungerann dopo terminata l'operazione alla destra del prodotto ottenuto, affine di conservare ad ogni cifra significativa il luogo che le compete. Lo stesso potrà farsi se il moltiplicatore è seguito da zeri, per una ragione analoga a quella accennata di sopra relativamente alla moltiplicazione di un numero qualunque per una cifra significativa seguita da zeri. Quindi se ambedue i fattori contengono uno o più zeri alla diritta, si tralasceranno tutti nell'eseguire la moltiplicazione, e si aggiungeranno in fine a destra del prodotto.

Quando il moltiplicatore contiene qualche zero fra mezzo alle cifre significative, siccome il prodotto parziale corrispondente a quella cifra zero sarebbe composto di soli zeri, così potrà omettersi per brevità di scrittura, badando di situar convenientemente il prodotto parziale che viene appresso.

§. 34. La regola della moltiplicazione sarà dunque la seguente: *Per moltiplicare due numeri qualsivogliano, si formano i prodotti parziali di ogni cifra del moltiplicatore per tutto il moltiplicando e si sommano, badando bene di situare le unità sotto le unità, le decine sotto le decine etc. Quando il moltiplicando o il moltiplicatore, oppure ambedue, contengono uno o più zeri alla diritta, non si terrà conto alcuno di tali zeri nell'eseguire l'operazione, ma si scriveranno in fine alla destra del prodotto ottenuto.*

Della divisione de' numeri interi.

§. 35. La *divisione* è quella operazione per la quale dato un prodotto ed uno dei suoi fattori, si cerca l'altro fattore. È dato per esempio il prodotto 64 ed uno de' suoi fattori 16; la divisione ha per oggetto di trovare l'altro fattore 4.

Nella divisione si considerano dunque tre numeri cioè, il prodotto dato, che si chiama *dividendo*, il fattore dato, che si chiama *divisore*, ed il fattore cercato, che si chiama *quoziente*. Questi numeri si situano come qui sotto.

Dividendo, o prodotto dato	*Divisore, o fattore dato*
64	16
	4 *quoziente, o fattore cercato.*

E poichè il divisore ed il quoziente sono i fattori del dividendo, si può fin d'ora conchiudere che, *in una divisione qualunque il divisore moltiplicato pel quoziente deve dare il dividendo.*

§. 36. Considerando i tre numeri 64, 16, e 4 come il *prodotto* ed i *fattori* di una moltiplicazione, si è già detto di sopra che il prodotto 64 contiene tante volte il moltiplicando 16, quante unità si contano nel moltiplicatore 4; e siccome la divisione ha per oggetto di trovare quest'ultimo numero, così potrà anche dirsi che la divisione ha per oggetto di trovare il numero delle volte che il 16 è contenuto nel 64, ed in generale: la divisione è quella operazione per mezzo della quale si cerca di conoscere quante volte un numero è contenuto in un altro. Per trovare quante volte

il numero 16 è contenuto nel 64, potrebbe adoperarsi la sottrazione ripetuta, come segue;

```
 64
 16
 --
 48
 16
 --
 32
 16
 --
 16
 16
 --
 00
```

dalla quale operazione risulta che il 16 è contenuto quattro volte nel 64, perchè tolto quattro volte dal 64 si è avuto un resto *zero*. Per mezzo della divisione si giunge più presto a questo risultamento, onde può dirsi che la divisione è un'abbreviazione della sottrazione.

§. 37. Inoltre, il prodotto 64 può anche considerarsi come il 4 ripetuto 16 volte, perchè ripetere quattro volte 16 è lo stesso che ripetere 16 volte quattro (§. 29); e quindi il numero 64 può supporsi composto di 16 parti eguali, ognuna delle quali è un 4. Quando si divide 64 per 16 l'operazione si riduce dunque a decomporre il numero 64 in sedici parti eguali, e trovare il valore di una di quelle parti, che sarebbe 4. Ciò posto si vede che la divisione può considerarsi anche come una operazione nella quale si cerca di decomporre un numero dato in tante parti eguali, quante unità sono contenute in un altro numero dato.

§. 38. Dunque la divisione si può riguardare sotto tre aspetti diversi;

1.° *La divisione è quella operazione per la quale dato un prodotto ed uno de' suoi fattori, si cerca l'altro fattore.*

2.° *La divisione è quella operazione per la quale si cerca quante volte un numero è contenuto in un altro.*

3.° *La divisione è quella operazione per la quale si cerca di decomporre un numero dato in tante parti uguali, quante unità si contengono in un altro numero dato.*

Nella divisione di 64 per 16 il quoziente 4 può aver perciò tre significati: 1.° esso è l'altro fattore di 64 che si cercava; 2.° esso denota il numero delle volte che il 16 è contennto nel 64; 3.° esso è una delle sedici parti eguali in cui si è diviso il 64. È importante di ben comprendere questi tre oggetti della divisione per ciò che dovrà dirsi in seguito.

§. 39. Ciò premesso, si distinguono tre casi nella divisione cioè,

1.° Quando il divisore è di una sola cifra, ed il dividendo è minore del decuplo del divisore, ossia del divisore seguito da un zero.

2.° Quando il dividendo è di più cifre ed il divisore è d'una sola cifra.

3.° Quando il dividendo ed il divisore sono due numeri di più cifre.

Nel primo caso è evidente che il quoziente non potrà essere maggiore di 9, e perciò la divisione si eseguirà per mezzo della tavola di Pitagora, cercando qual'è quel numero che moltiplicato pel divisore dia il dividendo. Così dovendo dividere 40 per 8, si vede che il quoziente è 5, perchè 5 è quel numero che moltiplicato per 8 dà per prodotto 40. Ma spesso non si trova nella tavola di Pitagora un numero che moltiplicato pel

divisore dia esattamente il dividendo, come per esempio se si dovesse dividere 47 per 8; perocchè 5 moltiplicato per 8 darebbe 40, minore del dividendo proposto, e 6 moltiplicato per 8 darebbe 48, maggiore di esso dividendo. Ciò dimostra che vi sono alcuni numeri che non si possono dividere esattamente per altri. Allora il dividendo è composto di un prodotto esatto del divisore per un altro numero, e di un resto minore del divisore. Il dividendo 47, per esempio, contiene il numero 40, prodotto esatto di 8 per 5, ed il resto 7 minore del divisore 8.

§. 40. Nel secondo caso della divisione, sia da dividersi 1068 per 4. L'operazione da eseguire sarà quella di trovare un numero tale che, moltiplicando le sue unità, decine, centinaja etc. per 4, e sommando i prodotti, si ottenga il dividendo 1068, poichè il dividendo 1068 si considera come un prodotto, del quale si conosce il fattore 4, e si cerca l'altro fattore.

Cominciamo ad osservare che il quoziente non può contenere migliaja; perchè se contenesse un solo migliajo, questo, moltiplicato per 4 darebbe un prodotto maggiore del dividendo. Al contrario il quoziente potrà contenere centinaja, onde sarà un numero di tre cifre; e per ciò che si è detto, il dividendo 1068 dovrà contenere tre prodotti, cioè (cominciando dalla sinistra) conterrà,

1.° il prodotto delle centinaja del quoziente per 4,
2.° il prodotto delle decine del quoziente per 4,
3.° il prodotto delle unità del quoziente per 4.

È chiaro poi che questi tre prodotti dovranno trovarsi rispettivamente nelle centinaja, nelle decine, e nelle unità del dividendo.

Separiamo con un puntino le centinaja del dividendo; il numero 10 di queste centinaja dovrà contenere il primo prodotto, e cercando nella tavola di Pitagora il numero che moltiplicato per 4 dà un prodotto prossimo al 10, si trova 2, il quale esprimerà le centinaja del quoziente. Il primo prodotto delle centinaja del quoziente per 4 è dunque 8, e tolto dai 10, resteranno nel dividendo gli altri due prodotti soltanto. Le due centinaja che rimangono dalla prima sottrazione appartengono al secondo prodotto, il quale dovrà trovarsi nel numero 26 composto del resto 2, e della cifra delle decine 6, ossia di 26 decine. Cercando nella tavola di Pitagora il numero che moltiplicato per 4 dà un prodotto prossimo al 26, si trova 6, e questa sarà la cifra delle decine del quoziente. Il secondo prodotto delle decine del quoziente per 4 sarà dunque 24, che tolto dal 26, dà un resto 2, il quale appartiene al terzo prodotto. Questo terzo prodotto dovrà trovarsi nel numero 28 formato dal resto 2 delle decine, e dalle unità del dividendo; e nella tavola di Pitagora si osserva che il numero 7 è quello che moltiplicato pel divisore 4 dà per terzo prodotto 28, il quale si toglierà dall'ultima parte del dividendo 28, e la divisione sarà terminata, essendo esaurito il dividendo.

```
10·68      4
 8        ———
———       267
 26
 24
———
  28
  28
———
  00
```

§. 41. Si vede chiaramente che in tutta l' operazione ora descritta non si è fatto altro che scomporre il dividendo, o prodotto dato, in tre prodotti parziali formati dal divisore moltiplicato per ciascuna cifra del quoziente. I tre prodotti parziali sono stati 8 centinaja, 24 decine e 28 unità, che sommati insieme danno il dividendo,

```
 8
 24
  28
1068
```

e sono quelli stessi, ma scritti in ordine inverso, che risultano dalla moltiplicazione del quoziente 267 per 4, come si è osservato parlando della moltiplicazione (§. 30);

```
 267
   4
  28
 24
 8
1068
```

§. 42. Si distinguono nella divisione i dividendi parziali, ed i prodotti parziali come quì appresso;

	Dividendo	*Divisore*
1.° *Dividendo parziale......*	10·68	4
1.° *Prodotto parziale....*	8	267 *quoziente*
2.° *Dividendo parziale.....*	26	
2.° *Prodotto parziale....*	24	
3.° *Dividendo parziale......*	28	
3.° *Prodotto parziale.....*	28	
Resto.....	00	

§. 43. Quando un dividendo parziale risulta minore del divisore, la divisione non può eseguirsi, ed è questo una pruova che il quoziente non contiene alcuna unità di quella classe; si scrive allora uno zero nel quoziente per non alterare il numero delle cifre che deve contenere, e si cala subito un' altra cifra per formare un nuovo dividendo parziale e continuare la divisione, come nell' esempio seguente.

1.° *Dividendo parziale......*	16·12	4
2.° *Prodotto parziale.....*	16	403
2.° *Dividendo parziale.....*	1·2	
3.° *Prodotto parziale....*	1 2	
Resto.....	0 0	

§. 44. Il terzo caso della divisione non presenta ora alcuna difficoltà. Sia da dividersi il numero 115132 per 428; si dovrà trovare un numero tale che le sue unità, decine, centinaja etc. moltiplicate per 428 diano altrettanti prodotti parziali, di cui la somma eguagli il dividendo proposto 115132.

Prima di tutto il quozlente non potrà contenere migliaia, ma sole centinaia, e perciò sarà composto di tre cifre. In conseguenza, il dividendo, che risulta dalla moltiplicazione del divisore pel quoziente, dovrà contenere tre prodotti parziali, i quali saranno,

1.° il prodotto delle centinaia del quoziente per 428,
2.° il prodotto delle decine del quoziente per 428,
3.° il prodotto delle unità del quoziente per 428.

Separiamo con un puntino le prime quattro cifre del dividendo che esprimono centinaia, ed avremo 1151. Questo primo dividendo parziale dovrà contenere il primo prodotto parziale di cui ora si è parlato, e cercando quel numero che moltiplicato per 428 dà un prodotto il più prossimo a 1151, si trova che un tal numero è 2, il quale esprimerà le centinaia del quoziente. Tolto il primo prodotto parziale 856 dal primo dividendo parziale, al resto 295 si aggiungono a fianco le decine 3 che contiene il dividendo e si forma il secondo dividendo parziale 2953, che deve contenere il secondo dividendo parziale. Si cerchi inoltre quel numero che moltiplicato per 428 dà un prodotto prossimo a 2953, e si troverà 6, il quale esprimerà le decine del quoziente. Dal secondo dividendo parziale tolto il secondo prodotto parziale 2568 si avrà per resto 385, al quale aggiunte le unità 2 del dividendo, si avrà il terzo ed ultimo dividendo parziale che dovrà contenere l'ultimo prodotto parziale. Il numero 9, che moltiplicato per 428 da un prodotto 3852 eguale all' ultimo dividendo parziale, rappresenterà le unità del quoziente, e fatta la sottrazione, si avrà per resto zero, e l'operazione sarà terminata.

In questa operazione il dividendo è stato decomposto ne' tre prodotti parziali 856 centinaia, 2568 decine, e 3852 unità, i quali sommati insieme riproducono lo stesso dividendo, e sono quei medesimi prodotti parziali che risultano dalla moltiplicazione del quoziete 269 pel divisore 428, il che si può osservare nelle operazioni qui appresso riportate.

```
1151·32     428          428 Divisore
 856        269          269 Quoziente
————                    ————
 2953                   3852
 2568                  2568
 ————                  856
  3852                ——————
  3852                115132 Dividendo.
  ————
  0000
```

Per trovare, come occorre qui sopra, la cifra del quoziente che moltiplicata per 428 dia il prodotto più prossimo ad uno de' dividendi parziali, devono farsi varii tentativi, considerando una dopo l'altra le cifre del divisore. Per esempio, sia da trovarsi il numero che moltiplicato per 428 dà il prodotto più prossimo a 2953. Questa operazione equivale all' altra di cercare quante volte il 428 è contenuto nel 2953, onde si dirà; la prima cifra 2 del dividendo non può contenere la prima cifra 4 del divisore, per cui dovranno prendersi le prime due cifre 29, le quali conterranno il 4 *sette* volte con un resto 1. Questo numero seguito dalla terza cifra 5 del dividendo dà 15, che contiene anche sette volte la seconda cifra 2 del divisore con un resto 1; ma, ponendo a fianco di questo

resto l' ultima cifra 3 del dividendo, si ottiene 13, che contiene una volta soltanto l' ultima cifra 8 del divisore. Tutto il divisore non può dunque esser contenuto *sette* volte nel dividendo, e però si dovrà ribassare a 6 il quoziente 7 ottenuto dal primo saggio. Quindi si replicherà: le prime due cifre 29 del dividendo contengono 6 volte la prima cifra 4 del divisore con un resto 5; questo numero seguito dalla terza cifra 5 del dividendo dà 55, che contenendo più di nove volte la seconda cifra 2 del divisore, ci avverte che tutto il divisore può benissimo esser contenuto *sei* volte nel dividendo, onde la cifra cercata sarà 6. La viva voce del maestro farà meglio comprendere questa specie di esercizio, senza che sia necessario di entrare in più minuti particolari. Solo faremo osservare che, quando il primo dividendo parziale ha lo stesso numero di cifre del divisore, il quoziente ha un numero di cifre che eccede di un' unità la differenza fra i numeri delle cifre del dividendo e del divisore, ed ha poi un numero di cifre eguale a quella differenza allorchè il primo dividendo parziale contiene una cifra di più del divisore.

§. 45. La divisione si abbrevia, praticando simultaneamente la moltiplicazione di ciascuna cifra del divisore per quella segnata nel quoziente e la sottrazione del prodotto ottenuto dal dividendo. Riprendiamo l'esempio superiore;

```
1151·32     428
 295 3      ———
  38 52     269
   0 00
```

Si deve primamente sottrarre il prodotto di 2 per 8, ossia 16, da 1, e siccome non si può, si toglie da 21, aumentando il sottraendo di 2 decine, e si segna 5 di resto; ma per compensare le due decine aggiunte, o bisogna toglierle dal 5 del dividendo, ovvero, riportarle al prodotto seguente aumentando così il sottrattore (§. 22): si dica dunque 2 per 2 fanno 4, e 2 che si riportano sono 6, che tolti dal 15, danno 9 di resto, ed una decina si riporta: 2 per 4 fanno 8 ed 1 che si riporta sono 9, e tolti da 11, rimane 2. Si procede similmente con le cifre 6 e 9. Adunque *per sottrarre dal dividendo il prodotto della cifra segnata nel quoziente per una delle cifre del divisore si aumenterà, se occorre, la cifra del dividendo di tante decine quante bisognano, badando di riportarle al prodotto seguente.*

§. 46. La divisione si abbrevia ancora quando il dividendo ed il divisore sono terminati da zeri, potendo togliersi un egual numero di zeri tanto dall'uno quanto dall'altro, senza che il quoziente ne rimanga alterato; perocchè il numero delle volte che il divisore è contenuto nel dividendo è lo stesso, quantunque l'uno e l'altro siano divenuti 10 volte, 100 volte etc. minori di quello che erano. Così 4 è contenuto 9 volte in 36, nello stesso modo che 40 è contenuto 9 volte in 360, e 400, 9 volte in 3600.

§. 47. Finalmente, se il divisore è eguale al dividendo, si avrà per quoziente l'unità. In fatti qualunque numero non può esser contenuto più di una volta in altro numero che lo pareggia; così 4 è contenuto una volta in 4, e 1000 è contenuto una volta in 1000 etc. Se poi il divisore

è uguale all'unità il quoziente sarà lo stesso del dividendo, perchè un quoziente diverso moltiplicato pel divisore 1 non riprodurrebbe il dividendo. Queste due proprietà sogliono enunciarsi nel seguente modo; *ogni numero diviso per se stesso è eguale all'unità, ed ogni numero diviso per l'unità è eguale a se stesso*. E siccome si è veduto pure che qualunque numero moltiplicato per l'unità non cambia di valore, perciò suole anche dirsi che, *l'unità non moltiplica nè divide*, cioè che qualunque numero moltiplicato o diviso per 1 rimane lo stesso.

Ripruova della moltiplicazione e della divisione.

§. 48. La moltiplicazione e la divisione sono due operazioni che servono scambievolmente una di ripruova all'altra. Per provare l'esattezza di una moltiplicazione, si divide il prodotto per uno de' fattori, e deve ottenersi l'altro fattore; se ciò non si verifica l'operazione è errata. Al contrario per verificare una divisione, siccome il dividendo corrisponde ad un prodotto di cui i fattori sono il divisore ed il quoziente, si moltiplicano questi due numeri fra loro, e deve ottenersi il dividendo; se ciò non si verifica l'operazione è errata. Quando però la divisione ha un resto, allora il dividendo non è il prodotto esatto del divisore pel quoziente, e perciò a questo prodotto deve aggiungersi il resto per ottenere il dividendo, come si è già osservato parlando del primo caso della divisione (§. 39). Quindi in generale *il dividendo si otterrà aggiungendo al prodotto del divisore pel quoziente il resto della divisione.*

§. 49. Ma la moltiplicazione e la divisione sono operazioni troppo complicate perchè la ripruova accennata di una di esse per mezzo dell'altra possa eseguirsi con molta utilità, e spesso avviene che l'operazione proposta riesce esatta, e si commette l'errore nell'operazione di verifica, per cui si perde molto tempo a cercarlo in ambedue. Quindi si preferisce la seguente ripruova detta *del nove*, la quale, quantunque possa esser fallace in qualche raro caso, pure per l'estrema sua facilità è utilissima nella pratica, anche perchè la moltiplicazione e la divisione sono operazioni che occorrono spesso in ogni specie di *calcolo* numerico (*). Essa si comprenderà più facilmente applicandola ad un esempio.

La moltiplicazione de'due numeri 428, e 269 ha dato il prodotto 115132, e si vuol provare se l'operazione è ben fatta. Si dividano tanto il moltiplicando che il moltiplicatore per 9, e si notino i resti delle divisioni, che saranno, 5 ed 8. Moltiplicando fra loro questi due numeri, e dividendo di nuovo per 9 il prodotto 40, si avrà un altro resto 4, il quale se la moltiplicazione de' proposti numeri 428 e 269 è ben fatta, dovrà eguagliare quello che si ottiene dividendo per 9 il loro prodotto 115132; come di fatto accade. In appresso si darà ragione di questa regola, e si dimostrerà pure che, per conoscere il resto della divisione di un numero qualunque per 9, basta sommare le sue cifre significative e dividere la somma per 9, ovvero *togliere quante volte si può il 9 dalla somma*

(*) *Calcolare* i numeri significa eseguire su i medesimi qualcheduna delle operazioni sinora esposte, o di quelle che si esporranno in seguito.

medesima. Perciò la ripruova del 9 applicata all'esempio in discorso potrà enunciarsi come segue.

Sommate le cifre 4, 2, ed 8 *del moltiplicando, e dalla somma* 14 *ottenuta toglietè quante volte si può il* 9; *scrivete indi il resto* 5 *in un angolo della crocetta segnata per rendere più chiaro il procedimento della ripruova. Fate lo stesso con le cifre del moltiplicatore, e scrivete il resto* 8 *in un altro angolo della croce. Moltiplicate fra loro i due resti* 5 ed 8, *e dal prodotto* 40 *togliete quante volte si può il* 9: *scrivete il nuovo resto* 4 *nel terzo angolo della crocetta. Se l'operazione è ben fatta, dovrà aversi lo stesso resto* 4, *togliendo quante volte si può il* 9 *dalla somma delle cifre* 1, 1, 5, 1, 3 e 2 *del prodotto;* il che appunto si verifica, come si vede notato nel quarto angolo della crocetta.

5 | 4
8 | 4

§. 50. Relativamente alla divisione, debba verificarsi quella del numero 115174 per 428, la quale ha dato un quoziente 269 con un residuo 42. *Togliete quante volte si può il* 9 *dalla somma delle cifre del divisore, e notate il resto* 5 *in un angolo della crocetta; fate lo stesso col quoziente* 269, *e registrate il resto* 8 *in un altro angolo. Moltiplicate fra loro i due resti ed aggiungete al prodotto* 40 *ottenuto la somma delle cifre del residuo* 42 *della divisione. Togliete quante volte si può il* 9 *dalla somma totale* 46, *ed il nuovo resto* 1 *dovrà, se l'operazione è ben fatta, riuscir lo stesso di quello che si ottiene dal dividendo* 115174, *togliendo quante volte si può il* 9 *dalla somma delle sue eifre;* come nel fatto si verifica.

5 | 1
8 | 1

Si avverte che quando nel sommare le cifre di un numero qualunque s'incontrassero de' 9, potranno tralasciarsi per brevità, giacchè includendoli, dovrebbero poi togliersi dalla somma ottenuta; ed inoltre che per togliere quante volte si può il 9 da una tal somma, potrà adoperarsi la stessa regola di sommare le cifre del numero che la rappresenta. Così essendo dato il numero 7896589766, la somma delle sue cifre, esclusi i 9, sarà 53, e per togliere quante volte si può il 9 da questo numero si sommeranno le sue cifre e si avrà 8, che sarà il resto cercato.

La ripruova del 9 è fallace se lo sbaglio commesso consiste nell'aver posti di più, o tralasciati nel prodotto o nel quoziente cercato uno o più 9, o uno o più zeri; oppure nell'aver fatte alcune cifre di tanto maggiori delle esatte, quante altre ne sono minori (*).

(*) Qualche professore riguarda come inutili le riprove, o verificazioni nei calcoli, sostenendo che il miglior modo di preservarli dagli errori è quello di raddoppiare di attenzione e di diligenza. Ma noi, per lunga esperienza, crediamo al contrario che la più grande attenzione, e la più provata abilità, non bastano ad assicurare l'esattezza di un calcolo, quando anche si eseguisse ripetutamente, perchè nel ripetere il calcolo si ripetono non di raro anche gli errori commessi. Per la qual cosa, lodevole, e da adottarsi sempre che si può, è il sistema di pervenire per diverse vie allo stesso risultamento di calcolo; e le ripruove, che invertono per lo più l'andamento delle operazioni primitive, non che essere utili, sono spesso necessarie. S'intende bene che il calcolatore debba usarne con giudizio, e sarebbe strano se in un lungo calcolo non si procedesse innanzi senza far prima le ripruove di tutte le operazioni intermedie. L'attenzione troppo prolungata si stai.ca, e le ripruove la soccorrono di tratto in tratto, assicurando il già fatto, e dando lena a riprendere come da capo il lavoro.

CAPO III.

DELLE FRAZIONI IN GENERALE.

Di alcuni segni de' quali si fa uso nell' Algebra.

§. 51. Premettiamo la conoscenza di alcuni segni de' quali si fa uso nell'*Algebra* per rendere più breve il discorso, perchè ci tornerà comodo adoperarli qualche volta d'ora innanzi.

Il segno + indica addizione e si pronunzia *più*. Così $4+7$ si legge *quattro più sette*, e rappresenta la somma de' due numeri 4 e 7, per cui vale lo stesso che 11. Similmente $4+7+9$ si legge *quattro più sette più nove*, e rappresenta la somma de' tre numeri 4, 7 e 9 ossia vale lo stesso che 20.

Il segno — indica sottrazione, e si pronunzia *meno*;

$8-4$ si legge *otto meno quattro*, e rappresenta il resto della sottrazione del numero 4 dall' 8, ossia la differenza fra i numeri 8 e 4, per cui equivale a 4.

Il segno $\times$, o anche un semplice puntino, indica moltiplicazione, e si pronunzia *moltiplicato per;*

8×4, oppure $8\cdot4$ si legge *otto moltiplicato per quattro*, e rappresenta il prodotto de' due numeri 8 e 4, per cui equivale a 32.

$\frac{8}{4}$, oppure $8:4$ si pronunzia *otto diviso per quattro*, e rappresenta il quoziente della divisione 8 per 4, onde equivale a 2.

Il segno $=$ dinota *eguaglianza*. L' uso di questo segno si può scorgere chiaramente nelle seguenti espressioni,

$$4+7+9=20$$
$$8-4=4$$
$$8\times4=32$$
$$8:4=2$$

le quali dipendono dalle cose dette di sopra.

Il segno $>$ indica *maggioranza*. Così $8>4$ dinota che 8 è maggiore di 4, e si pronunzia *otto maggiore quattro*.

Il segno $<$ indica *minoranza*. Per esempio $4<8$, si pronunzia *quattro minore otto*.

I segni di cui ora si è parlato possono combinarsi insieme per indicare più operazioni successive da eseguirsi sopra alcuni numeri. Così,

$$5\times4+2-3$$

indica che 5 deve moltiplicarsi per 4, al prodotto deve aggiungersi 2, e dalla somma ottenuta deve togliersi 3. Eseguite tutte queste operazioni, si ha per ultimo risultamento 19, per cui può stabilirsi l'eguaglianza,

$$5\times4+2-3=19.$$

Origine delle frazioni.

§. 52. *Le frazioni hanno origine dal resto della divisione*. Sia da dividersi il numero 65 per 4. Questa operazione consiste nel dividere il nu-

mero 65 in quattro parti eguali (§. 37). Il quoziente è 16; ma questo numero non è contenuto quattro volte esattamente nel 65, o come suol dirsi, non è l'esatta *quarta parte* di 65, poichè rimane un'unità ancora da dividersi in quattro parti eguali.

	65	4
	25	16
Resto	1	

Immaginando eseguita la divisione di questa unità in quattro parti eguali, una di esse parti, ossia la *quarta parte* dell'unità si scrive così, $\frac{1}{4}$; ed i numeri 4 ed 1 separati da una piccola linea, indicano che l'unità si è divisa in quattro parti eguali, e di queste parti se n'è presa una. L'espressione $\frac{1}{4}$, che si pronunzia *un quarto*, dicesi *frazione*, ed aggiunta al quoziente 16, dà $16\frac{1}{4}$, che rappresenta l'esatta quarta parte di 65.

Dovendo dividere 66 per 4, il resto sarà 2, e dovrà trovarsi la quarta parte di questo numero per aggiungerla al quoziente 16, e renderlo compiuto. Per dividere il 2 in quattro parti eguali, riflettiamo che questo numero contiene due unità, e perciò si dovrà supporre ognuna di queste unità divisa in quattro parti eguali, e prendere da ciascuna unità una dello quattro parti che contiene. Così la quarta parte di 2 sarà composta di $\frac{1}{4}$ di unità più $\frac{1}{4}$ di unità, ossia di *due quarti* di unità, che si scrivono $\frac{2}{4}$.

Se dovesse prendersi la quarta parte di 3, si vedrebbe similmente che essa è composta di $\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{4}$ dell'unità, ossia di tre quarti dell'unità che si scrivono, $\frac{3}{4}$. Dunque può conchiudersi che le espressioni $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, hanno due significati; indicano cioè la quarta parte de' numeri 2, e 3, ed indicano pure che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali, e di queste parti se ne sono prese due o tre.

§. 53. Fin quì abbiamo considerato soltanto le frazioni che nascono dall'unità divisa in quattro parti, perchè il divisore della divisione proposta era 4, ed in quattro parti doveva dividersi il resto. Ma si cambi il divisore, e sia per esempio 3; la divisione sarà la seguente:

	65	3
	5	21
Resto.............	2	

Si dovrà ora dividere il resto 2 in tre parti eguali, ed aggiungere una delle tre parti, ossia la *terza parte* di 2 al quoziente. Questa operazione si eseguirà immaginando divisa in tre parti eguali ognuna delle unità contenute nel 2, e prendendo una parte da ciascuna unità. La frazione che ne nasce si scrive, $\frac{2}{3}$, e si pronunzia *due terzi*; essa rappresenta la *terza parte* di 2, ed indica pure che l'unità è stata divisa in tre parti eguali, delle quali se ne sono prese due. Importa molto di ben comprendere questo doppio significato delle frazioni per ciò che deve dirsi in seguito.

Il precedente ragionamento potendo applicarsi ad un'altra qualunque divisione dell'unità in cinque, sei, sette etc. parti eguali, sarà facile comprendere il significato di qualsivoglia frazione. Così la frazione $\frac{4}{5}$ indica l'unità divisa in cinque parti eguali delle quali se ne sono prese quattro,

e rappresenta anche una delle cinque parti eguali in cui si è diviso il numero 4, ossia la *quinta parte* di 4; la frazione $\frac{5}{7}$ indica l'unità divisa in sette parti eguali delle quali se ne sono prese cinque etc. etc.

§. 54. Le frazioni prendono diversi nomi secondochè diverso è il numero delle parti in cui si suppone divisa l'unità. Le frazioni che risultano dalla divisione dell'unità in due parti si chiamano *mezzi*.

in 3 *parti*, si chiamano............ *terzi*
in 4 *parti*...................... *quarti*
in 5 *parti*...................... *quinti*
in 6 *parti*...................... *sesti*
in 7 *parti*...................... *settimi*
in 8 *parti*...................... *ottavi*
in 9 *parti*...................... *noni*
in 10 *parti*...................... *decimi*
in 11 *parti*...................... *undicesimi*
in 12 *parti*...................... *dodicesimi*
etc. etc.

La terminazione in *esimi* vale per tutte le altre divisioni dell'unità all'infinito.

§. 55. La divisione, o la scomposizione dell'unità in parti eguali, si può immaginare soltanto, quando si considera l'unità astratta, ma non si può ridurre ad effetto.Se però all'unità si dia un valore concreto, potrà allora eseguirsi col fatto quella scomposizione, e sarà facile ancora assegnare il valore di una frazione qualunque dell'unità. Per esempio, se l'unità fosse una canna di stoffa, potrebbe prendersene effettivamente la quarta parte, dividendo in quattro parti eguali quella stoffa nella sua lunghezza, e staccandone una parte. Se l'unità fosse una moneta, come un ducato che vale 100 grana, e volesse conoscersi quante grana vale la frazione $\frac{3}{4}$ del ducato stesso, si ragionerebbe così. La frazione $\frac{3}{4}$ dinota che il ducato deve dividersi in quattro parti eguali e devono prendersi tre di quelle parti; dunque bisogna prima di tutto trovare la quarta parte del ducato, e questa si otterrà dividendo 100 grana per 4, che dà per quoziente 25 grana. Indi questa quarta parte si replicherà tre volte, e si avrà 75, onde si dirà che $\frac{3}{4}$ di un ducato valgono 75 grana. Avrebbe potuto anche farsi in altro modo. Si sa che la frazione $\frac{3}{4}$ rappresenta pure la quarta parte di 3, e quindi prendere tre quarti di un ducato è lo stesso che prendere un quarto di tre ducati. E poichè tre ducati valgono 300 grana, dividendo questo numero per 4 si ottiene per quoziente 75 come prima.

§. 56. Da quanto precede risulta che, *deve intendersi per frazione, una espressione numerica rappresentante una o più parti eguali di quelle in cui si suppone divisa l'unità.*

Che cosa significa numeratore, e denominatore, frazione vera, e frazione spuria.

§. 57. In ogni frazione si considerano, come abbiamo veduto, due numeri. *Si chiama denominatore il numero inferiore che dinota in quante parti si è divisa l'unità, e numeratore l'altro che indica quante parti se ne sono*

prese. Per esempio, nella frazione $\frac{3}{4}$ il denominatore è 4, ed indica che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali, ed il numeratore è 3, ed indica che se ne sono prese tre. Il numeratore ed il denominatore, insieme considerati, si chiamano i *termini* della frazione.

§. 58. Le frazioni traendo la loro origine dal resto della divisione che è minore del divisore, dovrebbero avere il numeratore sempre minore del denominatore, ed essere perciò sempre minori dell'unità. Ma ritengono il nome di frazione anche quelle che hanno il numeratore eguale o maggiore del denominatore. Le medesime si chiamano però frazioni *spurie* per distinguerle dalle prime che diconsi frazioni *vere*, o *legittime.*

Una frazione qualunque che ha il numeratore eguale al denominatore, per poco che si esamini il suo significato, si troverà sempre eguale all'unità. Per esempio, $\frac{4}{4}$ significa che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali delle quali se ne sono prese quattro, cioè si sono prese tutte, e per conseguenza il valore della frazione è la stessa unità. Ciò vien confermato ancora dall'osservazione che la frazione $\frac{4}{4}$ rappresenta la quarta parte di 4, e questa quarta parte si ottiene dividendo 4 per 4 (§. 37), la quale divisione dà per quoziente l'unità. Lo stesso ragionamento potrebbe applicarsi alle frazioni $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$ etc. onde in generale ciascuna delle frazioni seguenti può considerarsi come l'espressione dell'unità,

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \frac{9}{9}, \frac{10}{10} \text{ etc.}$$

Le frazioni spurie che hanno il numeratore maggiore del denominatore sono minori dell'unità. Per esempio, nella frazione $\frac{5}{4}$ il denominatore dinota che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali; e siccome di queste parti non se ne possono prendere più di quattro, così essendo il numeratore 5 maggiore di 4, bisogna supporre che due unità siano state divise ognuna in quattro parti eguali, e per formare la frazione $\frac{5}{4}$ si siano prese tutte le parti della prima unità, ed una delle parti della seconda. La frazione $\frac{5}{4}$ è dunque maggiore dell'unità, e questa conseguenza si desume ancora dal riflettere che $\frac{5}{4}$ rappresenta la quarta parte di 5, la quale si ottiene dalla divisione di 5 per 4, che dà per quoziente $1\frac{1}{4}$ (§. 39, e §. 52). Così pure la frazione $\frac{8}{4}$ rappresenta la quarta parte di 8, la quale si ottiene con la divisione di 8 per 4, che dà per quoziente 2; e quindi la frazione $\frac{8}{4}$ è la stessa cosa dell'intero 2.

Da ciò possiamo ancora stabilire che, *una frazione qualunque non è altra cosa che una divisione accennata e non eseguita, nella quale il dividendo è rappresentato dal numeratore della frazione, ed il divisore dal denominatore. Per le frazioni vere la divisione non può eseguirsi e rimane indicata, e per le frazioni spurie, se si esegue, la frazione si cambia in un intero, o in un intero unito ad una frazione.*

Cambiamenti che si operano in una frazione, accrescendo o diminuendo, moltiplicando o dividendo uno de' suoi termini.

§. 59. Accrescendo il numeratore di una frazione senza alterare il suo denominatore si accresce la frazione, poichè si prende un numero maggiore di parti dell'unità, e diminuendo il numeratore si diminuisce la frazione, perchè se ne prende un numero minore. Così $\frac{3}{4}$ è maggiore

di $\frac{2}{4}$, perchè delle quattro parti eguali in cui è divisa l'unità se ne prendono tre in vece di due; ed $\frac{1}{4}$ è minore di $\frac{2}{4}$, perchè si prende una sola parte delle quattro in cui è divisa l'unità in vece di prenderne due.

Nello stesso modo raddoppiando il numeratore si raddoppia la frazione, perchè si prende un numero doppio di parti dell'unità; triplicando il numeratore si triplica la frazione etc. Per esempio le frazioni $\frac{4}{10}$ e $\frac{6}{10}$ sono la prima doppia, e la seconda tripla di $\frac{2}{10}$. Viceversa prendendo la metà del numeratore, si prende la metà della frazione, prendendone la terza parte, si prende la terza parte della frazione etc., perchè di un dato numero di parti dell'unità si prende la metà o la terza parte. Così la frazione $\frac{2}{10}$ è metà di $\frac{4}{10}$, come il numeratore 2 è metà del numeratore 4, e similmente $\frac{2}{10}$ è terza parte di $\frac{6}{10}$, come 2 è terza parte di 6 etc. Dunque in generale, *moltiplicando* il numeratore di una frazione per 2, per 3, o per qualunque altro numero, la frazione rimane *moltiplicata* per lo stesso numero; *dividendo* il numeratore, la frazione rimane *divisa*.

§. 60. L'opposto accade rispetto al denominatore delle frazioni. Accrescendo il denominatore di una frazione, e non alterando il suo numeratore si diminuisce la frazione, perchè accrescendo il denominatore si accresce il numero delle parti eguali in cui è divisa l'unità, onde ciascuna parte diviene più piccola, e diminuendo il denominatore, si diminuisce il numero delle parti in cui è divisa l'unità, e ciascuna parte diviene più grande. Per esempio, debba dividersi un ducato in quattro parti eguali, ovvero a quattro persone; spetterà a ciascuna persona la frazione $\frac{1}{4}$ di ducato, e siccome il ducato è composto di 100 grana, spetteranno a ciascuno 25 grana. Debba poi dividersi il ducato in cinque parti eguali o a cinque persone; la porzione di ciascuno sarà $\frac{1}{5}$ di ducato, ovvero 20 grana. Crescendo dunque il numero delle parti in cui si è divisa l'unità, è divenuto più piccolo il valore di ciascuna parte. La frazione $\frac{1}{5}$ è minore di $\frac{1}{4}$, ed in conseguenza anche $\frac{2}{5}$ è minore di $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$ è minore di $\frac{3}{4}$, ec., poichè le frazioni $\frac{2}{5}$, e $\frac{3}{5}$ non sono che $\frac{1}{5}$ preso più volte, e tali sono ancora le frazioni $\frac{2}{4}$, e $\frac{3}{4}$ rispetto ad $\frac{1}{4}$.

Raddoppiando il denominatore di una frazione, si raddoppia il numero delle parti in cui è divisa l'unità, onde il valore di ciascuna parte diviene metà di quello che era prima, e quindi tutta la frazione rimane divisa per metà. Per esempio, se debba distribuirsi un tomolo di grano a *tre* persone, siccome il tomolo è composto di 24 misure, spetterà a ciascuna persona $\frac{1}{3}$ di tomolo, ossiano 8 misure di grano; ma se il tomolo di grano dovrà distribuirsi a *sei* persone, allora spetterà a ciascuno la frazione $\frac{1}{6}$ di tomolo, ossiano 4 misure di grano soltanto. La frazione $\frac{1}{6}$ è dunque metà di $\frac{1}{3}$, laddove il suo denominatore 6 è doppio del denominatore 3. In conseguenza anche $\frac{2}{6}$ è metà di $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{6}$ è metà di $\frac{3}{3}$. Triplicando il denominatore, la frazione diviene terza parte di quello che era prima. Così $\frac{1}{6}$ è la terza parte di $\frac{1}{2}$, come risulta pure dall'esempio proposto, poichè $\frac{1}{6}$ di tomolo vale 4 misure, laddove $\frac{1}{2}$ vale 12 misure. Dunque in generale *moltiplicando* il denominatore di una frazione per un certo numero, si viene a *dividere* la frazione per lo stesso numero. Viceversa dividendo il denominatore di una frazione per 2, per 3, per 4 etc., la frazione rimane moltiplicata per quel numero, perchè il valore di ciascuna parte dell'unità viene con ciò a raddoppiarsi, triplicarsi, qua-

druplicarsi etc., e l'esempio precedente potrà anche servire a renderlo manifesto.

§. 61. Dopo di ciò rimane dimostrata la seguente tavola;

Moltiplicando / *Dividendo*	*il numeratore*	*si moltiplica* / *si divide*	*la frazione*
Moltiplicando / *Dividendo*	*il denominatore*	*si divide* / *si moltiplica*	*la frazione*

Non si altera il valore di una frazione se si moltiplicano, o si dividono i suoi termini per un medesimo numero.

§. 62. Si abbia per esempio la frazione $\frac{4}{5}$. Moltiplicando per 2, ossia raddoppiando il suo numeratore, si raddoppia la frazione (§. 59); perciò la frazione $\frac{8}{5}$ è doppia della frazione $\frac{4}{5}$, ed al contrario $\frac{4}{5}$ è metà di $\frac{8}{5}$. Moltiplicando per 2 il denominatore della frazione $\frac{8}{5}$, si divide per metà questa frazione (§. 60), onde la nuova frazione $\frac{8}{10}$ è metà di $\frac{8}{5}$. Ma $\frac{4}{5}$ è pure metà di $\frac{8}{5}$, dunque $\frac{4}{5}$, ed $\frac{8}{10}$ sono la stessa cosa; e ciò è avvenuto perchè la frazione $\frac{4}{5}$ si è prima moltiplicata, e poi si è divisa per lo stesso numero 2, per cui il suo valore è rimasto inalterato, e solo la sua forma è cambiata.

Un simile risultamento si otterrebbe moltiplicando i due termini della frazione per qualunque altro numero. Così $\frac{4}{5}$ è la stessa cosa di $\frac{12}{15}$, e di $\frac{16}{20}$, $\frac{20}{25}$ etc.

§. 63. Dividendo il numeratore ed il denominatore di una frazione per lo stesso numero, il valore di essa neppure si altera, e ciò può dimostrarsi in un modo analogo al precedente.

Dividiamo per 4 il numeratore della frazione $\frac{16}{20}$, e la tavola del §. 61 ci permetterà di dire che,

$\frac{4}{20}$ è quarta parte di $\frac{16}{20}$, o quindi
$\frac{16}{20}$ è quadrupla di $\frac{4}{20}$.

Dividiamo per 4 il denominatore della frazione $\frac{4}{20}$, e per la stessa tavola avremo che,

$\frac{4}{5}$ è quadrupla di $\frac{4}{20}$.

Dunque tanto $\frac{4}{5}$ che $\frac{16}{20}$ sono quadruple di $\frac{4}{20}$, e perciò sono eguali fra loro.

Modo di ridurre una frazione a più semplice espressione.

§. 64. Per ciò che precede una frazione può avere infinite forme diverse, conservando lo stesso valore: per esempio,

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{12},\ \frac{7}{14},\ \frac{8}{16},\ \frac{9}{18},\ \frac{10}{20},\ \frac{11}{22},\ \frac{12}{24}\ \text{etc.}$$

sono frazioni che hanno tutte lo stesso valore, ma diverse forme, e si ottengono moltiplicando i termini della frazione $\frac{1}{2}$ per 2, 3, 4 etc., successivamente.

Tra queste frazioni si osserva che la prima ha la forma più semplice di tutte, e che una delle altre si può ridurre alla prima dividendo i suoi termini per uno stesso numero, la quale operazione non ne altera il valore. Sia data la frazione $\frac{12}{24}$ da ridursi ad una espressione più semplice. Si comincerà a dividerne per 2 il numeratore ed il denominatore, e si avrà $\frac{6}{12}$; si continueranno a dividere per 2 i termini di questa frazione, e si avrà $\frac{3}{6}$, e dividendo per 2 i termini di quest' ultima, si otterrà in fine la frazione $\frac{1}{2}$.

Dunque *una frazione si riduce ad espressione più semplice cercando un numero che sia divisore esatto tanto del numeratore che del denominatore, e dividendo i termini della frazione per questo numero.* Quanto più grande sarà il *comune divisore*, la frazione sarà ridotta ad un'espressione più semplice. Così dividendo i termini della frazione $\frac{12}{24}$ per 2, si ha la frazione $\frac{6}{12}$, dividendoli per 4, si ha $\frac{3}{6}$, e finalmente dividendoli per 12 si ha $\frac{1}{2}$.

È chiaro poi che *la frazione sarà ridotta alla più semplice espressione quando fra il suo numeratore ed il suo denominatore non vi sarà alcun divisore comune maggiore dall' unità*, poichè se ve ne fosse un altro maggiore, dividendo i termini della frazione per quel numero, la frazione prenderebbe una forma più semplice ancora. Per esempio $\frac{3}{6}$ non è la forma più semplice della frazione $\frac{12}{24}$, poichè fra il numeratore ed il denominatore di $\frac{3}{6}$ vi è il divisore comune 3 pel quale divisi i termini della frazione, si ottiene la sua ultima espressione $\frac{1}{2}$.

Regole per conoscere quando un numero è divisibile per 2, per 5, per 3, o per 9,

§. 65. Per rendere più agevole la riduzione di una frazione alla più semplice espressione, giova dare alcune regole per conoscere a primo aspetto se i suoi termini sono divisibili esattamente per i numeri semplici, 2, 5, 3, e 9.

Qualunque numero terminato da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8, *è divisibile esattamente per* 2, perchè nell' eseguire la divisione, dovendo ogni resto esser minore del divisore, il penultimo resto sarà necessariamente *zero*, oppure 1; e quindi, calando l' ultima cifra, se il resto è *zero*, l' ultimo dividendo parziale sarà uno de' numeri 0, 2, 4, 6, 8, e se il resto è 1, sarà 10, 12, 14, 16, 18, i quali numeri sono tutti divisibili per 2. Per esempio, debba dividersi 4568 per 2, l'operazione sarà la seguente,

	4568	2
	5	2284
	16	
Ultimo dividendo parziale.	8	
	0	

dove il penultimo resto è stato zero, e l'ultimo dividendo parziale è stato 8, divisibile esattamente per 2.

I numeri divisibili per 2 si chiamano numeri *pari*, perchè possono dividersi esattamente in due parti eguali. Tutti gli altri numeri si dicono *dispari*, o *caffi*. Questi numeri non sono divisibili esattamente per 2, e per nessun altro numero pari.

§. 66. *I numeri che terminano o con* zero, *o con* 5 *sono esattamente divisibili per* 5; perocchè il penultimo resto della divisione deve essere necessariamente uno de' numeri 0, 1, 2, 3, 4, e perciò l' ultimo dividendo parziale deve essere uno de' numeri 0, 10, 20, 30, 40, oppure 5, 15, 25, 35, 45, i quali numeri sono tutti divisibili per 5. Per esempio, dividendo per 5 il numero 585, il penultimo resto della divisione è 3; per conse-

guenza l' ultimo dividendo parziale è 35, il quale numero è esattamente divisibile per 5.

585	5
8	117
35	
0	

§. 67. *Se la somma delle cifre significative di cui si compone un numero qualunque è divisibile per* 3, *o per* 9, *il numero sarà ancora divisibile per* 3, *o per* 9. Per esempio il numero 58410 è divisibile per 3 e per 9 perchè la somma delle sue cifre è 18, che si divide esattamente per 9. Per dimostrare questa regola si rifletta che dividendo per 3, o per 9 l' unità seguita da uno, o più zeri, si deve avere sempre per resto 1. Infatti il 10 si compone di 9 e di 1, il 100 si compone di 99 e di 1, il 1000 si compone di 999 e di 1, e così di seguito, ed è evidente che i numeri 9, 99, 999 etc. sono esattamente divisibili per 3 e per 9. Ora se i numeri 10, 100, 1000 etc. divisi per 3, o per 9 danno un resto 1, è chiaro che i numeri 20, 200, 2000 etc. daranno un resto 2, e gli altri 30, 300, 3000 etc. un resto 3, e così ogni numero formato da una cifra significativa seguita da zeri, se si divida per 3 o per 9 darà un resto eguale alla cifra significativa. Per esempio 50000 diviso per 9 deve dare per resto 5.

Dopo di ciò supponendo il numero 58410 decomposto nei numeri,

50000 *che diviso per* 9 *dà per resto*.	5
8000 *che diviso per* 9 *dà per resto*.	8
400 *che diviso per* 9 *dà per resto*.	4
10 *che diviso per* 9 *dà per resto*.	1
Somma de' residui.	18

si vede che la somma de' residui delle divisioni parziali è 18, e corrisponde alla somma delle cifre significative. Dunque il numero 58410 diviso parzialmente per 9 dà per resto la somma delle sue cifre significative, e perciò se questo resto contiene esattamente il 9, il numero proposto sarà esattamente divisibile per 9, come realmente si verifica nel numero 58410. Questo numero è anche divisibile per 3, perchè la somma de' residui, 18, è divisibile esattamente per 3. In generale ogni numero divisibile per 9, è anche divisibile per 3, ma spesso un numero divisibile per 3 non è divisibile per 9, e ciò avviene quando la somma de' residui è divisibile per 3 e non per 9.

Da quanto precede si desume che per ottenere il resto della divisione di un numero qualunque per 9, si sommeranno le sue cifre significative, e se la somma è maggiore di 9, dalla medesima si toglierà quante volte si può questo numero.

Ciò premesso, prima di dimostrare la riprova del *nove* di cui si è parlato nel §. 49, esporremo una importante proprietà della moltiplicazione, che le serve di fondamento.

§. 68. Moltiplicare un numero qualunque per un altro, per esempio 428 per 269, significa ripetere il 428 *duecento sessantanove volte*, ed è chiaro che se 428 si considera composto di due parti, come di 423, e di 5, bisognerà ripetere duecento sessantanove volte il 423, e duecento ses-

santanove volte il 5. Di più, se anche il moltiplicatore 269 si considera composto di due parti, per esempio di 261, e di 8, in vece di ripetere il 423 duecento sessantanove volte, varrà lo stesso ripeterlo prima *duecento sessantuno* volte, e poi *otto* volte; e similmente si ripeterà il 5 prima 261 volte e poi 8 volte. *Dunque per moltiplicare la somma di due numeri*, 423+5, *per la somma di due altri numeri*, 261+8, *dovrà moltiplicarsi ciascun numero della seconda somma per ciascun numero della prima, e sommare i quattro prodotti ottenuti*. Sarà cioè, (423+5) *moltiplicato per* (261+8)=261·423+261·5+8·423+8·5=115132.

Quando le somme da moltiplicarsi siano composte di più di due numeri, sarà facile persuadersi che il prodotto totale risulterà sempre dall'unione di tutti i prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun numero di una somma per ciascun numero dell'altra.

§. 69. Ora, se si dividono per 9 i due fattori 428, e 269 della moltiplicazione proposta per esempio, siccome prescrive la suddetta ripruova del nove, si avranno rispettivamente i quozienti 47, e 29, ed i resti 5 ed 8, e poichè oggiungendo al prodotto del quoziente pel divisore il resto dello divisione si ottiene il dividendo, sarà

428=47·9+5, e 269=29·9+8, ovvero
428=423+5, 269=261+8.

Risulta da questa uguaglianza che i due numeri 423 e 261, contenendo il 9 come fattore, sono esattamente divisibili per esso. Laonde, de' quattro prodotti che compongono il prodotto totale di 428 per 269, i primi tre 261. 423, 261. 5, ed 8. 423 sono esattamente divisibili per 9; e quindi se lo stesso prodotto totale 115132 si divide per 9, il resto della divisione non potrà trovarsi in alcuno de' tre prodotti indicati, ma dovrà trovarsi nel quarto prodotto 5·8, che è quello dei residui delle divisioni per 9 dei due numeri 428, e 269. Dunque togliendo quante volte si può il 9 da siffatto prodotto, si dovrà avere un resto eguale a quello che dà la divisione per 9 del prodotto totale 115132, quando questo non sia erroneo. Ed in ciò appunto consiste la ripruova del 9: perocchè col sommare le cifre del numero 428 fra loro e toglierne quante volte si può il 9 non si fa che cercare il resto della divisione di 428 per 9, e similmente facendo col 269, si ottengono i residui 5 ed 8, nel prodotto dei quali deve trovarsi il residuo della divisione di 115132 per 9, il quale residuo si ottiene poi anche direttamente sommando le cifre di questo numero e togliendone i 9. Dalla coincidenza dei residui ottenuti ne' due diversi modi si giudica dell'esattezza dell'operazione.

Riflettendo un poco sull'andamento della dimostrazione precedente, si vedrà che la ripruova della moltiplicazione potrebbe anche eseguirsi dividendo i fattori ed il prodotto per qualunque altro numero diverso dal 9, ma si è prescelto il 9 per la facilità che offre nell'eseguire le divisioni.

Quali sieno i numeri primi, *ed i numeri* primi fra loro.

§. 70. Deve farsi un'altra distinzione importante fra i numeri. Si chiamano *numeri primi* quelli che non hanno alcun divisore esatto all'infuori dell'unità, e di loro stessi. La serie de' numeri primi è la seguente, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc. nella quale qualunque numero, per esempio 29, non può dividersi esattamente che per 1, o per 29.

Si chiamano *numeri primi fra loro* quelli che non hanno nessun divisore comune maggiore dell'unità, sebbene ciascuno di essi non sia numero primo. Per esempio 6 e 25 non sono numeri primi, ma sono primi fra loro, poichè i numeri 2, 3, e 6 che dividono esattamente il 6 non dividono esattamente il 25, ed i numeri 5, e 25 che sono divisori esatti di

25 non lo sono di 6. Risulta quindi dal §. 64 che, quando i termini di una frazione sono due numeri primi fra loro, la frazione non può ridursi ad espressione più semplice, per cui si chiama *irriducibile*. Tale è appunto la frazione $\frac{6}{25}$.

§. 71. Se alla frazione $\frac{6}{25}$ si aggiunge un intero qualunque 2, si avrà $2+\frac{6}{25}$, ovvero riducendo tutto a frazione, $\frac{25\times2+6}{25}=\frac{56}{25}$. Or questa nuova frazione è irriducibile al pari di $\frac{6}{25}$ da cui deriva. In fatti per potersi la frazione $\frac{56}{25}$ ridurre ad espressione più semplice, bisognerebbe che il numeratore 56 fosse divisibile esattamente per 25, o per qualche divisore esatto di 25. Ma il numero 56 si compone di due parti cioè, di 25×2, e di 6, e la prima parte 25×2 contenendo il numero 25 come fattore, è divisibile esattamente per 25, non meno che per qualunque divisore esatto di 25: affinchè dunque tutto il numero 56 potesse dividersi esattamente per un divisore di 25, dovrebbe anche la seconda parte 6 esser divisibile esattamente per quel divisore; e ciò non potendo accadere perchè i numeri 6 e 25 sono primi fra loro, il numero 56 non potrà neanche dividersi esattamente per alcun divisore di 25, e la frazione $\frac{56}{25}$ sarà irriducibile. Dunque in generale *se ad una frazione irriducibile si aggiunga un numero intero, ne risulterà una nuova frazione pure irriducibile.*

Trovare tutti i divisori di un numero dato.

§. 72. Ad oggetto di facilitare sempre più la riduzione delle frazioni a' loro minimi termini, esporremo il metodo che deve tenersi per trovare tutti i divisori di un numero qualunque, anche perchè potrà riuscire utile in molte altre occasioni.

Sia proposto il numero 360; si comincerà a dividerlo successivamente pei numeri primi 2, 3, 7, 11 etc., ripetendo la divisione per lo stesso numero, sempre che sarà possibile, nel modo seguente

360 *diviso per* 2 *dà* 180
180 . . . . *per* 2 . . 90
90 . . . . *per* 2 . . 45
45 . . . . *per* 3 . . 15
15 . . . . *per* 3 . . 5
5 . . . . *per* 5 . . 1

I numeri 2, 2, 2, 3, 3, 5 si chiamano i *divisori semplici* di 360, e sono i suoi fattori elementari, perchè moltiplicati fra loro lo riproducono; siccome può verificarsi con sostituire al dividendo di ciascuna delle successive divisioni il prodotto del corrispondente divisore pel quoziente. Si avrà,

$$360=2\cdot180=2\cdot2\cdot90=2\cdot2\cdot2\cdot45$$
$$=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot15=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$$

Si disporranno poi i dividendi e i divisori semplici come nel seguente quadro.

Dividendi.	*Divisori semplici.*	*Divisori semplici e composti.*
	1	1
360	2	2
180	2	4
90	2	8
45	3	3, 6,12,24
15	3	9,18,36,72
5	5	5,10,20,40,15,30,60,120,45,90,180,360.
1		

Il numero 360, risultando dalla moltiplicazione di tutti i divisori semplici fra loro, avrà per fattori anche i prodotti che si possono fare co' divisori medesimi in tutti i modi. Per esempio, poichè $360=2.2.2.3.3.5$, sarà pure $360=4.2.3.3.5$, e $360=2.12.3.5$, etc., dalle quali ugnaglianze apparisce che i numeri 4 e 12 nascenti dal prodotto di due o più divisori semplici, sono anche divisori esatti di 360. Laonde per trovare tutti i divisori di 360 con un procedimento metodico, si comincerà dal ripetere nella 3.ª colonna il divisore 1, e si moltiplicherà il seguente divisore 2 della 2.ª colonna per questo primo divisore della terza, nella quale si noterà il prodotto 2. Allo stesso modo il terzo divisore semplice 2 si moltiplicherà pei divisori 1, 2 scritti nella 3.ª colonna, e nel registrare in essa i nuovi prodotti, si ometterà il divisore 2 già notato. E così procedendo, il quarto divisore 2 della seconda colonna si moltiplicherà per tutti i divisori 1, 2, 4 della 3.ª colonna; il quinto divisore 3 della 2.ª colonna si moltiplicherà per tutti i divisori già notati nella terza, ed ogni nuovo divisore semplice della seconda colonna si moltiplicherà per tutti i divisori semplici e composti già scritti nella terza, tralasciando sempre di scrivere i prodotti che sarebbero ripetuti. In tal modo si verranno a formare in quest' ultima colonna tutti i divisori semplici e composti di 360.

§. 73. Si comprenderà poi facilmente che il numero 360 può formarsi in molte diverse maniere per mezzo de' suoi divisori composti; per esempio può ottenersi moltiplicando fra loro i numeri 3, 6, 20, oppure gli altri 4, 9, 10, etc.: ma in una sola maniera può comporsi per mezzo de' suoi divisori semplici cioè, $360=1.2.2.2.3.3.5$; perocchè questi numeri essendo primi, non possono nascere dal prodotto di altri più piccoli, e quindi sono invariabili nella formazione del numero 360. Accaderebbe lo stesso per qualunque altro numero che si volesse rappresentare per mezzo de' suoi divisori semplici, i quali non potranno mai variare.

Ridurre una frazione a minimi termini *per mezzo del massimo comune divisore.*

§. 74. Il metodo indicato nel §. 64 per ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, o come suol dirsi, ai *suoi minimi termini*, è spesso il più facile a praticarsi: ma riesce lungo ed incerto allorchè i termini della frazione sono numeri molto grandi, o hanno per divisore comune qualche numero primo di due o più cifre, che è difficile a rinvenire. Allora si adopera a preferenza il metodo del *massimo comune divisore.*

Si è già veduto che quanto maggiore è il numero per cui si dividono i termini di una frazione, tanto più semplice è l' espressione alla quale essa si riduce. Per consegnenza se di tutti i divisori comuni al numeratore e al denominatore della frazione si cerchi il più grande, e si dividano i due termini per questo numero, la frazione sarà ridotta alla sua più semplice espressione.

Per trovare quel comune divisore maggiore di tutti gli altri, ovvero il *massimo comune divisore* fra il numeratore ed il denominatore di una frazione, si farà uso della regola seguente:

Si divida il maggiore de' due termini della frazione pel minore, indi quest' ultimo per il resto della divisione; poi il divisore della seconda divisione per il resto della medesima, e così andando avanti. Si giungerà finalmente ad una divisione senza resto; il divisore di quest' ultima divisione esatta sarà il massimo comune divisore fra i due termini della frazione. Debba per esempio ridursi a minimi termini la frazione $\frac{325}{728}$. Si cercherà

in prima il massimo comune divisore fra i due numeri 728, e 324, e l'operazione si registrerà come segue ,

		2	4	6 *quozienti.*
Dividendi e divisori	728	325	78	13
	650	312	78	
	78	13	00	

Il massimo comune divisore sarà 13 , e dividendo i termini 728 , e 325 per questo numero si otterrà la frazione $\frac{25}{56}$ che è la più semplice espressione della frazione proposta.

§. 75. Per dimostrare questa regola bisogna premettere alcuni principii.

1.° *Se il numero divide esattamente il dividendo e il divisore di una divisione qualunque, dividerà esattamente anche il resto; e se divide esattamente il divisore ed il resto, dividerà esattamente il dividendo.* Ragionando sull' esempio proposto qui sopra, poichè in una divisione il dividendo si riproduce moltiplicando il quoziente pel divisore ed aggiungendo il resto al prodotto ottenuto, le tre divisioni di cui si compone l'operazione precedente daranno le seguenti uguaglianze;

$$728 = 2 \times 325 + 78 \ldots\ldots (1)$$
$$325 = 4 \times 78 + 13 \ldots\ldots (2)$$
$$78 = 6 \times 13 \ldots\ldots (3)$$

Ora supponendo che un numero qualunque 13 divida esattamente i due numeri 728 e 325, dividendo e divisore della prima divisione, dico che dividerà anche il resto 78. In fatti, se 13 divide 325, deve dividere ancora il prodotto 2×325; ma dalla eguaglianza (1) apparisce che il numero 728 è composto di due parti 2×325 e 78 , dunque essendo la prima parte divisibile per 13, bisogna che lo sia anche la seconda 78, affinchè il tutto 728 sia divisibile per 13, come si è supposto. Inoltre, se un numero qualunque 13 divide esattamente il divisore 325 ed il resto 78 di una divisione, è chiaro che dividerà anche il dividendo 728; perocchè se divide 325 dividerà il suo multiplo 2×325, e dividendo le parti 2×325, e 78, dividerà il tutto $2 \times 325 + 78$, ossia dividerà il numero 728.

2.° *Il* massimo *comune divisore fra due numeri, è* massimo *comune divisore anche fra il numero minore ed il resto della divisione di uno per l'altro.*

Supponendo che 13 sia il *massimo* comune divisore fra 728 e 325, in forza del principio precedente il numero 13 dividerà anche esattamente 78 , e quindi sarà un divisore comune dei due numeri 325 e 78. Ma sarà anche il *massimo* divisore di questi numeri, perchè se ve ne fosse un altro più grande , come 15 , questo numero (per lo stesso principio citato) dovrebbe anche dividere 728, e perciò, essendo divisore comune de' due numeri 728 e 325 , ne risulterebbe che 13 non sarebbe più il maggior divisore dei numeri medesimi come si è supposto.

Premessi questi principii, riflettiamo che nella prima divisione il massimo comune divisore fra 728 e 325 deve esser lo stesso di quello che esiste fra 325 e 78. Per la medesima ragione nella seconda divisione il massimo comune divisore fra 325 e 78 deve esser lo stesso di quello fra 78 e 13, e per conseguenza il massimo comune divisore fra 728 e 325 deve esser lo stesso di quello fra 78 e 13. Ma dalla terza divisione senza resto apparisce che il massimo comune divisore fra 78 e 13 è il medesimo numero 13 , perchè un numero qualunque 13 non può avere un divisore maggiore di se stesso ; dunque 13 è il massimo comune divisore fra 728 e 325, e rimane così dimostrata la regola esposta di sopra.

È chiaro che se due numeri non hanno un divisore comune maggiore dell' unità , nell' operazione che serve alla ricerca del loro massimo comune divisore , il divisore dell' ultima divisione senza resto dovrà essere la stessa unità.

Delle frazioni continue.

§. 76. Quando le frazioni irriducibili hanno una forma molto complicata, è difficile farsi un' idea chiara del loro valore, ossia della parte dell' unità che rappresentano. Perciò occorre talvolta cercare delle frazioni che sotto forma più semplice poco differiscano nella loro quantità da una frazione proposta. Il metodo che si usa a tale oggetto è il seguente.

Sia data la frazione $\frac{25}{56}$, e si dividano i suoi termini pel numeratore 25, ciò che non altera il suo valore; si avrà, $\frac{25}{56}=\frac{1}{2+\frac{6}{25}}$: si dividano di nuovo per 6 i termini della frazione $\frac{6}{25}$, ed essa diverrà $\frac{1}{4+\frac{1}{6}}$, la quale espressione posta in luogo di $\frac{6}{25}$ nell' altra poc' anzi ottenuta $\frac{1}{2+\frac{6}{25}}$, darà, $\frac{25}{56}=\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}}$.

Questa nuova forma data alla frazione $\frac{25}{56}$ dicesi *frazione continua*. Ed in generale, *s'intende per frazione continua una frazione che ha per numeratore l' unità, e per denominatore un numero intero più una frazione, la quale ha essa pure per numeratore l'unità e per denominatore un intero più una frazione; e così di seguito.*

Trascurando la parte aggiunta al primo denominatore 2 della frazione continua equivalente a $\frac{25}{56}$ si avrà la frazione $\frac{1}{2}$, che è l' espressione più semplice, ma nello stesso tempo meno approssimata, che possa sostituirsi alla frazione proposta; trascurando soltanto la frazione $\frac{1}{6}$ aggiunta al secondo denominatore 4 si otterrà; $\frac{1}{2+\frac{1}{4}}$, ovvero $\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}$, frazione meno semplice ma di valore più approssimato a $\frac{25}{56}$: e finalmente ritenendo tutta l' espressione, si risalirà alla stessa frazione proposta, per mezzo di operazioni contrarie a quelle eseguite per ottenere la frazione continua; così sarà,

$$\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{25}{6}}}=\frac{1}{2+\frac{6}{25}}=\frac{1}{\frac{56}{25}}=\frac{25}{56}.$$

§. 77. Per valutare l' errore che si commette nell'adottare le frazioni $\frac{1}{2}$, o $\frac{4}{9}$ in vece della proposta, si rifletterà prima di tutto che la frazione $\frac{1}{2}$ deve essere maggiore di $\frac{25}{56}$, perchè il denominatore 2 è minore di quello della frazione continua, essendosi trascurata la parte aggiunta $\frac{1}{4+\frac{1}{6}}$; ed al contrario la frazione $\frac{4}{9}$ è minore di $\frac{25}{56}$, perchè la frazione $\frac{1}{4}$ è più grande di $\frac{1}{4+\frac{1}{6}}$ che ha un maggior denominatore, e quindi la somma $2+\frac{1}{4}$ è maggiore di $2+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}$, e la frazione $\frac{1}{\;+\frac{1}{4}}$, ossia $\frac{4}{9}$, è minore della intera frazione continua $\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}}$, che ha un denominatore più piccolo. Inoltre la frazione $\frac{1}{2}$ equivalente a $\frac{28}{56}$, differisce dalla proposta per $\frac{3}{56}$, e le frazioni, $\frac{4}{9}$ e $\frac{25}{56}$ differiscono fra loro $\frac{1}{504}$ soltanto, perchè riducendole allo stesso denominatore divengono, $\frac{224}{504}$ e $\frac{225}{504}$.

§. 78. Sia per secondo esempio da ridursi in frazione continua la frazione ordinaria $\frac{100000}{314159}$. Dividendo il numeratore ed il denominatore per 100000 si avrà $\frac{1}{3+\frac{14159}{100000}}$, dividendo di nuovo per 14159 i termini della frazione aggiunta si ot-

terrà, $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{887}{14159}}}$ e così andando avanti, nel modo usato di sopra. Ma per seguire una via più breve in questa operazione, riflettiamo che essa si riduce all' altra che ha per oggetto di trovare il massimo comune divisore fra i termini della frazione proposta, poichè i denominatori della frazione continua altro non sono che i quozienti delle divisioni successive che si eseguono a tal uopo. Premettiamo dunque l'operazione del massimo comune divisore, come qui appresso,

	3	7	15	1	25	1	7	4
314159	100000	14159	887	854	33	29	4	1
300000	99113	887	854	66	29	28	4	
14159	887	5289	33	194	4	1	0	
		4435		165				
		854		29				

e la frazione continua che ne deriva sarà,

$$\frac{100000}{314159}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\frac{1}{4}}}}}}}}$$

Dalla medesima, ponendo successivamente a calcolo sempre un denominatore di più, si dedurranno le frazioni ordinarie che seguono, le quali sono più semplici della proposta, ma ad essa gradatamente si approssimano tanto per valore che per forma;

$$\frac{1}{3},\ \frac{7}{22},\ \frac{106}{333},\ \frac{113}{355},\ \frac{2931}{9208},\ \frac{3044}{9563},\ \frac{24239}{76149},\ \frac{100000}{314159}.$$

Con un esame non dissimile da quello istituito nell' esempio precedente si dimostrerà che queste frazioni sono alternativamente maggiori o minori della frazione proposta; così $\frac{1}{3}$ è maggiore, $\frac{7}{22}$ è minore, $\frac{106}{333}$ è maggiore, $\frac{113}{355}$ è minore etc. Esse esprimono tutte il *rapporto del diametro alla circonferenza*, che si considera in *Geometria*; ma le due $\frac{7}{22}$, e $\frac{113}{355}$ sono conosciutissime, una per la sua antichità, e l' altra per la sua approssimazione e simmetria. Il rapporto $\frac{7}{22}$ fu trovato la prima volta da *Archimede* celebre geometra di Siracusa, e questa frazione ridotta allo stesso denominatore con la proposta, risulta minore della medesima di $\frac{887}{6911498}$ che può valutarsi presso a poco eguale ad $\frac{1}{7792}$, dividendone i termini per 887; approssimazione soddisfacente per un rapporto così semplice. Il rapporto $\frac{113}{355}$ fu dato da *Mezio*, ed ha due grandi vantaggi, il primo di ritenersi facilmente a memoria perchè si compone de' tre numeri dispari più semplici scritti per ordine di grandezza, e ripetuto ciascuno due volte cioè, 113:355; il secondo di non differire dalla frazione proposta che per una quantità assolutamente trascurabile, poichè riducendo le due frazioni $\frac{113}{355}$, e $\frac{100000}{314159}$ allo stesso denominatore si osserva che la loro differenza è $\frac{33}{111526445}$, ossia $\frac{1}{3379589}$ circa.

Dell' addizione e della sottrazione delle frazioni.

§. 79. Quando due o più frazioni hanno lo stesso denominatore, è chiaro che le parti di cui sono composte appartengono alla stessa divisione dell' unità, e sono perciò eguali. Così le frazioni $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$, sono amendue l' unione di più *quinti*, ossia l' unione di parti della stessa divisione dell' unità, onde ognuna delle parti di cui è composta la prima

frazione è uguale ad ognuna delle parti di cui è composta la seconda. Dopo questa osservazione l'addizione e sottrazione delle frazioni che hanno lo stesso denominatore non presenta alcuna difficoltà, poichè potrà prendersi la somma o la differenza de' loro numeratori, appunto come si sommano o si sottraggono i numeri composti di unità intere; ma affinchè il risultamento di questa operazione esprima la vera grandezza delle unità poste a calcolo, si scriverà sotto alla somma o alla differenza ottenuta, il denominatore comune alle due frazioni. Per esempio, come due *ducati* e tre *ducati* formano l'unione o la somma di cinque *ducati*, così pure due *settimi* e tre *settimi* formano la somma di cinque *settimi*. Similmente la somma delle due frazioni $\frac{8}{15}$ e $\frac{5}{15}$ sarà $\frac{13}{15}$, e la loro differenza sarà $\frac{3}{15}$.

§. 80. Qui cade a proposito un'avvertenza che abbiamo tralasciata parlando dell'addizione e della sottrazione de' numeri interi per non accrescere la difficoltà de' principii. Le unità che si considerano nell'Aritmetica non sono tutte della stessa grandezza o della stessa specie. Così 15 ducati e 25 grana sono numeri *omogenei*, ossia della stessa specie, perchè tutti due esprimono moneta, ma sono composti di unità di diversa grandezza, poichè ogni ducato equivale a 100 grana. Inoltre, 15 ducati e 25 fucili sono numeri *eterogenei*, o di specie diversa, perchè il primo esprime una somma di denaro, ed il secondo una collezione di armi da fuoco. Ora, è evidente che l'addizione e la sottrazione non possono eseguirsi se i numeri che si considerano sono collezioni di unità di diversa grandezza o di diversa specie; con la differenza però, che quelle due operazioni sono assolutamente impossibili trattandosi di numeri *eterogenei*, poichè, per esempio, il ducato non ha alcuna relazione col fucile, e non si potrà mai formare un sol numero dall'unione di un numero di ducati e di un numero di fucili: ed al contrario le operazioni medesime possono spesso eseguirsi, mediante particolari avvertenze, quando i numeri sono omogenei, sebbene composti di unità di diversa grandezza, come si vedrà parlando de' numeri complessi.

§. 81. Spesso dall'addizione di due o più frazioni risulta una frazione spuria, la quale può ridursi ad un intero più una frazione vera eseguendo la divisione del numeratore pel denominatore (§. 58). Questa operazione si chiama, *estrarre gl' interi da una frazione.*

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

§. 82. L'addizione o la sottrazione non possono eseguirsi sulle frazioni che hanno diverso denominatore, perchè i loro numeratori sono composti di unità di diversa grandezza, nè possono con la somma o la sottrazione ridursi ad un sol numero; nello stesso modo che se dovessero sommarsi 3 ducati con 6 grana, la somma non potrebbe esser rappresentata dal numero 9, ma s'indicherebbe soltanto dicendo, *tre ducati, e sei grana*. In tal caso le frazioni prima di sommarsi si riducono allo stesso denominatore.

Due o più frazioni si riducono allo stesso denominatore moltiplicando i termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori delle altre. Così per ridurre le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ allo stesso denominatore, si moltiplicano i termini

della prima per 12, prodotto de' denominatori 3, e 4 delle altre due; i termini della seconda per 8, prodotto de' denominatori 2, e 4; ed i termini della terza per 6, prodotto dei denominatori 2, e 3. Con questa operazione le frazioni avranno per denominatore comune il prodotto de' tre denominatori 2, 3, 4, nè cambieranno di valore, perchè i termini di ognuna sono moltiplicati per uno stesso numero. Le frazioni ridotte saranno, $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{6}{24}$.

§. 83. Quando i denominatori delle frazioni da ridursi non sono numeri primi fra loro, può trovarsi per le medesime un denominatore comune più piccolo del prodotto di tutti i denominatori, il quale suole essere per lo più un numero molto grande. Siano da ridursi allo stesso denominatore le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$. Riflettiamo che in generale può prendersi qualsivoglia numero per denominatore comune di queste frazioni, purchè sia divisibile esattamente per ciascuno de' loro denominatori. In fatti una frazione qualunque, per esempio $\frac{2}{3}$, può cambiarsi in un'altra che abbia per denominatore un numero divisibile esattamente pel suo denominatore 3, come 72; e ciò con moltiplicare i termini della frazione pel quoziente 24 della divisione di 72 per 3. Il denominatore della nuova frazione dovrà essere necessariamente 72, e la frazione trasformata sarà $\frac{48}{72}$. Le quattro frazioni proposte potrebbero quindi avere per denominatore comune il numero 72, il quale è divisibile esattamente per ciascuno dei loro denominatori 3, 4, 6, ed 8; ed il numero 48 godendo della medesima proprietà, potrebbe anche prendersi per comune denominatore delle frazioni medesime.

Ma per trovare un numero il quale sia il più piccolo denominatore comune che possa darsi alle frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, moltiplichiamo il maggiore de' quattro denominatori, 8, pe' numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. successivamente, ed avremo 8, 16, 24, 32 etc. Fra questi numeri, che sono tutti quelli che possono dividersi esattamente per 8 e diconsi i *multipli* di 8, si troverà sicuramente il denominatore cercato; e per riconoscerlo, basterà ricordarsi che esso deve potersi dividere esattamente anche per ciascuno degli altri tre denominatori 3, 4, 6, e deve essere il più piccolo possibile. Il numero 24 adempie a queste due condizioni, poichè nessun multiplo di 8 più piccolo di 24 può dividersi esattamente per 3, per 4, e per 6; dunque 24 è il comune denominatore cercato. Si divida 24 per ciascuno dei quattro denominatori 3, 4, 6, 8, e si otterranno i quozienti 8, 6, 4, 3. Moltiplicando rispettivamente per questi numeri i termini delle frazioni proposte $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, si avranno le altre $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{21}{24}$, ridotte allo stesso denominatore.

§. 84. Si potrebbe anche ottenere il minimo comune denominatore ossia il *minimo comune dividendo* di tutti i denominatori delle frazioni proposte, decomponendo ciascuno di questi denominatori ne'suoi fattori semplici, o elementari (§. 72), e formando il prodotto di tutti i fattori diversi, con l'avvertenza che, quando un fattore è ripetuto in uno o più denominatori, dovrà prendersi tante volte, quante è scritto nel denominatore in cui è maggiormente ripetuto. Così nell'esempio precedente, i quattro denominatori essendo 3, 2·2, 2·3, 2·2·2, il minimo comune denominatore risulterà dal prodotto de' fattori semplici 3. 2. 2. 2=24.

Il prodotto che si ottiene dalle moltiplicazioni successive di più numeri fra loro non cambia di valore, qualunque sia l'ordine col quale si eseguono le moltiplicazioni.

§. 85. Nel ridurre più frazioni al medesimo denominatore abbiamo veduto che il prodotto di tutti i denominatori riusciva sempre lo stesso, quantunque s'incominciassero le moltiplicazioni ora da un denominatore ed ora da un altro. Non deve credersi che ciò sia avvenuto soltanto in quel caso particolare, poichè in generale il prodotto che si ottiene moltiplicando successivamente più numeri fra loro rimane lo stesso, comunque si cambi l'ordine de' fattori.

Per dimostrarlo consideriamo tre numeri 4, 5, e 6, e proponiamoci di provare che il prodotto de' numeri 4, e 5 moltiplicato per 6, che indicheremo così, (4. 5). 6, è lo stesso del prodotto de' numeri, 5 e 6 moltiplicato per 4, ovvero (5. 6). 4. Si è già veduto che 4. 5 è lo stesso di 5.4 (§. 29), e perciò in vece di (4. 5). 6 potremo scrivere (5. 4). 6. Ora, il prodotto di 5 per 4 non è altra cosa che il 5 ripetuto *quattro* volte, ed il prodotto di 5 per 6 equivale al 5 ripetuto *sei* volte. Disponiamo dunque il prodotto 5. 4, composto di *quattro* 5, in una linea orizzontale, e scriviamo cinque linee simili al di sotto. Avremo così compito un quadro del quale ogni linea orizzontale corrisponde al prodotto 5. 4, ed ogni

5 , 5 , 5 , 5
5 , 5 , 5 , 5
5 , 5 , 5 , 5
5 , 5 , 5 , 5
5 , 5 , 5 , 5
5 , 5 , 5 , 5

colonna verticale al prodotto 5. 6, e siccome il quadro stesso può considerarsi composto di sei linee orizzontali, o pure di quattro colonne verticali, così *sei* volte il prodotto 5. 4 sarà la stessa cosa di *quattro* volte il prodotto 5. 6 ovvero

$$(5.\,4).6=(5.6).4$$

come ci eravamo proposti di dimostrare.

§. 86. Con un simile ragionamento proveremo che

$$(5.\,4).6=(4.\,6).5.$$

Da ciascuna delle due eguaglianze precedenti se ne possono dedurre altre due cambiando l'ordine de' fattori ne' prodotti 5. 4, 5. 6, e 4. 6, come è permesso (§. 29), e si avrà

$$(5.\,4).6=(5.\,6).4;\ (4.\,5).6=(5.6).4;\ (5.4).6=(6.\,5).4$$
$$(5.\,4).6=(4.\,6).5;\ (4.\,5).6=(4.6).5;\ (5.4).6=(6.\,4).5$$

le quali potranno abbreviarsi come segue,

$$4.5.6=4.6.5=5.4.6=5.6.4=6.4.5=6.5.4.$$

In quest' ultima espressione osservandosi tutti i possibili cambiamenti nel luogo de' fattori componenti il prodotto de' tre numeri 4, 5, e 6, se ne desume che il prodotto stesso rimane inalterato qualunque sia l'ordine col quale si eseguono le moltiplicazioni.

Consideriamo inoltre il prodotto di quattro numeri 4, 5, 6, e 7 e proponiamoci di dimostrare che

$$(4.\,5).6.7=(6.7).4.5$$

Da ciò che precede abbiamo che

(4.5).6=4.6.5=24.5, e quindi

(4.5).6.7=24.4.5.7. Similmente

(6.7.).4=4.6.7=24.7, e per conseguenza,

(6.7).4.5=24.7.5. E potendo cambiarsi comunque l'ordine de' tre fattori 24, 5, e 7, ne segue ancora che

24.5.7=24.7.5, ovvero

(4.5).6.7=(6.7).4.5.

Con un simile discorso si dimostrerebbe la verità della proposizione enunciata, anche quando il prodotto fosse composto di un numero qualunque di fattori.

Riduzione di un intero ad una frazione spuria di dato denominatore, e di un intero ed una frazione ad una sola frazione.

§. 87. Debba ridursi l' intero 4 ad una frazione spuria che abbia per denominatore 3: riflettendo che ogni unità contenuta nel 4 può mettersi sotto la forma di $\frac{3}{3}$ (§. 58), si vede che il 4 equivale alla frazione $\frac{3}{3}$ ripetuta quattro volte; ma moltiplicando il numeratore, si moltiplica la frazione (§. 59); dunque la frazione $\frac{3}{3}$ ripetuta quattro volte, ossia il numero proposto 4, equivale a $\frac{12}{3}$, ed è questa la cercata frazione spuria, il cui numeratore si ottiene *moltiplicando l' intero pel denominatore dato.*

Vogliasi inoltre ridurre ad una sola frazione l' intero 4 unito alla frazione $\frac{2}{3}$: si cambierà il 4 in $\frac{12}{3}$, e questa frazione sommata con $\frac{2}{3}$, darà la frazione unica $\frac{14}{3}$ equivalente a $4\frac{2}{3}$. Dunque, *per ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione, o sia per sommare un intero con una frazione, si moltiplica l' intero per il denominatore della frazione, al prodotto si aggiunge il numeratore, e si scrive il denominatore sotto alla somma ottenuta.*

Dell' addizione e della sottrazione degl' interi accompagnati da frazioni.

§. 88. Quando deve eseguirsi l' addizione d' interi e frazioni, con interi e frazioni, si comincia ad operare sulle frazioni. Debba per esempio aggiungersi $13\frac{3}{5}$ con $4\frac{5}{7}$: si cominciano a ridurre le due frazioni allo stesso denominatore, per poterle sommare, ed esse divengono $\frac{21}{35}$ e $\frac{25}{35}$; indi la loro somma $\frac{46}{35}$, che è una frazione spuria, si riduce ad un intero più una frazione vera (§. 81), e l' intero ottenuto si unisce alla somma degl' interi. La somma totale sarà $18\frac{11}{35}$.

La sottrazione si esegue pure prima sulle frazioni, e poi sugl' interi il che non presenta alcuna difficoltà. Avviene però spesso che la frazione da sottrarsi è maggiore di quella da cui deve togliersi. Per esempio debba togliersi $4\frac{5}{7}$ da $13\frac{3}{5}$; dopo ridotte le frazioni allo stesso denominatore, dalla frazione $\frac{21}{35}$ dovrebbe sottrarsi la frazione $\frac{25}{35}$, ma ciò non potendo eseguirsi, si aggiungerà alla frazione $\frac{21}{35}$ un' unità improntata dall' intero 13, e si avrà $\frac{56}{35}$ (§. 87). In conseguenza $13\frac{21}{35}$ è lo stesso di $12\frac{56}{35}$, da cui tolto $4\frac{25}{35}$ si avrà per residuo $8\frac{31}{35}$.

Seguono alcuni esempii.

Addizione.				*Addizione.*				*Sottrazione.*
$54\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{5}$	$208\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{8}$	520
$105\frac{1}{2}$	$\frac{20}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{18}{30}$	$28\frac{1}{4}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{15}{16}$
$19\frac{3}{5}$		20		$\frac{1}{8}$		8		519 $\frac{1}{16}$
$179\frac{23}{30}$		15		$236\frac{17}{24}$		6		
		18 | 30				3		
		53 | —				17		
		23 1						

La tavola del §. 61 serve per moltiplicare e per dividere una frazione qualunque per un numero intero.

§. 89. Dovendo moltiplicare una frazione per un numero intero, la tavola del §.61 ci presenta evidentemente due maniere di farlo cioè, moltiplicando il numeratore della frazione per l' intero, oppure dividendo il denominatore per lo stesso numero. La prima operazione si può sempre eseguire, ma non così la seconda, poichè il denominatore potrebbe non essere esattamente divisibile per il numero dato. Sia per esempio da moltiplicarsi $\frac{2}{10}$ per 2 il prodotto sarà $\frac{4}{10}$, oppure $\frac{2}{5}$, secondochè si moltiplicherà il numeratore, o si dividerà il denominatore della frazione per 2. Ma se dovesse moltiplicarsi $\frac{2}{9}$ per 2, il prodotto non potrebbe avere che la sola forma $\frac{4}{9}$, giacchè la divisione del denominatore 9 è inesatta, e darebbe l' espressione $\frac{2}{4+\frac{1}{2}}$, equivalente bensì alla frazione $\frac{4}{9}$, ma di aspetto diverso da quello delle frazioni ordinarie.

La divisione di una frazione per un numero intero si esegue pure con la tavola del §. 61, moltiplicando il denominatore, o dividendo il numeratore della frazione pel numero dato. Così $\frac{4}{5}$ diviso per 2, dà per quoziente $\frac{4}{10}$, oppure $\frac{2}{5}$; ma non potrebbe eseguirsi la divisione di $\frac{4}{5}$ per 3, dividendo il numeratore, onde in tal caso il quoziente può avere soltanto la forma $\frac{4}{15}$, che si ottiene moltiplicando il denominatore della frazione per 3.

Della moltiplicazione di un intero per una frazione, o di due frazioni tra loro.

§. 90. Parlando della moltiplicazione de' numeri interi abbiamo osservato che, *il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando nello stesso modo che il moltiplicatore si forma per mezzo dell' unità.* Così se il moltiplicatore si forma con la riunione di *tre* unità, il prodotto si forma similmente con la riunione di *tre* numeri eguali al moltiplicando; e se il moltiplicatore non è che la semplice unità intera, il prodotto ancora non è che il semplice moltiplicando. Estendendo questo principio al caso in cui il moltiplicatore sia una frazione, è evidente che siccome il moltiplicatore si forma prendendo una parte dell' unità, il prodotto si dovrà formare prendendo una parte simile del moltiplicando. Per esempio il moltiplicatore $\frac{3}{4}$ di una moltiplicazione si forma per mezzo dell' unità, dividendola in quattro parti eguali, e prendendo tre di quelle parti, ossia prendendo la *quarta parte* dell' unità e ripetendola *tre* volte, ed allo stesso modo il prodotto di un numero qualunque per $\frac{3}{4}$ dovrà formarsi prendendo la *quarta parte* di quel numero e ripetendola *tre* volte, cioè *per formare il prodotto si dovrà prendere una parte del moltiplicando simile alla parte dell'unità indicata dalla frazione moltiplicatore.* Dopo di ciò sarà facile eseguire la moltiplicazione di un numero qualunque per una frazione, ed anche di una frazione per un' altra frazione.

§. 91. 1.° Sia da moltiplicarsi 12 per $\frac{2}{3}$; la frazione moltiplicatore esprimendo le *due terze parti* dell' unità, per formare il prodotto bisognerà prendere le *due terze parti* del moltiplicando 12, cioè prendere la *terza*

parte di 12 e ripeterla *due* volte. La terza parte di 12 è 4, e quindi il prodotto sarà 8. In questo esempio il prodotto è risultato un numero intero perchè il moltiplicando 12 era divisibile esattamente per 3.

2.° Debba moltiplicarsi 5 per $\frac{3}{4}$; il prodotto dovrà essere *tre quarti* del moltiplicando 5, come il moltiplicatore è *tre quarti* dell'unità. Si cercherà dunque la quarta parte di 5, che è $\frac{5}{4}$, e prendendola tre volte nel modo indicato dal §. precedente, si avrà per prodotto, $\frac{5\times3}{4}$ ovvero $\frac{15}{4}$.

Quindi *per moltiplicare un intero per una frazione, deve moltiplicarsi l'intero pel numeratore, e scrivere il denominatore sotto al prodotto ottenuto.* Questa regola si confonde con quella data nel §. 89 per moltiplicare una frazione per un intero; per cui si può conchiudere che il prodotto di un intero per una frazione è lo stesso di quello della frazione per l'intero, malgrado che il significato di queste due operazioni sia in apparenza diverso. Moltiplicare $\frac{3}{4}$ per 5 significa ripetere cinque volte la frazione $\frac{3}{4}$, e moltiplicare 5 per $\frac{3}{4}$ sigoifica prendere i tre quarti di 5.

§. 92. 3.° Siano finalmente da moltiplicarsi tra loro le frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$. Prendiamo la seconda per moltiplicatore, e siccome questa vale *due terzi* dell'unità, così il prodotto cercato dovrà valere *due terzi* del moltiplicando $\frac{4}{5}$. Per formare un tal prodotto si dovrà dunque prendere la terza parte della frazione $\frac{4}{5}$ e raddoppiarla. La terza parte di $\frac{4}{5}$ si ottiene dividendo questa frazione per 3, e pel §. 89, il quoziente risulterà $\frac{4}{5\times3}$, ovvero $\frac{4}{15}$; moltiplicando quest'ultima per 2 si avrà per lo stesso §. $\frac{4\times2}{5\times3}$, ossia $\frac{8}{15}$, che sarà il prodotto delle due frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$. Si potrebbe giungere in un altro modo allo stesso risultamento. Si moltiplichino i termini della frazione moltiplicando per 3, e si avrà la frazione equivalente $\frac{12}{15}$. Di questa dovranno prendersi le due terze parti, e siccome il numeratore 12 è divisibile per 3, potranno eseguirsi sul medesimo tanto la divisione per 3 che la moltiplirazione per 2, e si otterrà pure la frazione $\frac{8}{15}$ per prodotto delle due frazioni proposte.

Consideriamo inoltre $\frac{4}{5}$ come moltiplicatore; il prodotto delle frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ dovrà essere *quattro quinti* del moltiplicaudo $\frac{2}{3}$, perchè il moltiplicatore rappresenta *quattro quinti* dell'unità. Perciò si dovrà prendere la quinta parte di $\frac{2}{3}$ e moltiplicarla per 4, cioè si dividerà la frazione $\frac{2}{3}$ per 5, ed il quoziente ottenuto si moltiplicherà per 4. Ambedue queste operazioni si eseguono con le regole del §. 89, o la prima darà $\frac{2}{3\times5}$, la seconda $\frac{2\times4}{3\times5}$ ovvero $\frac{8}{15}$, che sarà il prodotto richiesto.

Dunque tanto la moltiplicazione di $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ quanto quella di $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ ha dato per prodotto una frazione, della quale il numeratore è il prodotto de' numeratori delle frazioni da moltiplicarsi, ed il denominatore è il prodotto de' denominatori; onde potrà stabilirsi la regola generale che, *per moltiplicare fra loro due frazioni si deve moltiplicare il numeratore pel numeratore ed il denominatore pel denominatore.*

Delle frazioni di frazioni, e del modo di ridurle a frazioni semplici.

§. 93. Nel §. 90 si è fatta dipendere la moltiplicazione delle frazioni dal principio enunciato nel §. 26 trattandosi della moltiplicazione de'numeri interi, che il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando nello stesso modo che il moltiplicatore si forma per mezzo dell' unità. Sotto questo aspetto non vi è alcuna differenza tra la moltiplicazione delle frazioni e quella dei numeri interi, onde la definizione generale della moltiplicazione è la seguente: *moltiplicare due dati numeri fra loro vuol dire formare un terzo numero per mezzo del primo nello stesso modo che il secondo si forma per mezzo dell'unità.* Ma paragonando il prodotto col moltiplicando si vede che, se il moltiplicatore è un numero intero, il prodotto è sempre maggiore del moltiplicando, e non gli è eguale se non quando il moltiplicatore pareggia l'unità ; ed al contrario, se il moltiplicatore è una frazione vera, il prodotto non è che una parte del moltiplicando. Dunque la parola *moltiplicare*, che quando si opera su i numeri interi, vale *ripetere un numero tante volte quante unità si contengono in un altro numero dato*, deve intendersi diversamente quando si opera sulle frazioni, e significa, *prendere di un numero dato la parte che viene indicata da una data frazione.*

Il prodotto di due frazioni essendo una parte della frazione moltiplicando, può dirsi una *frazione* di quella *frazione*. Così il prodotto $\frac{8}{15}$ delle due frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$ è *due terzi di quattro quinti*, *o quattro quinti di due terzi*, secondochè si prende per moltiplicando $\frac{4}{5}$, o $\frac{2}{3}$. In conseguenza, se è data una frazione, e se ne vuol prendere una frazione, o parte conosciuta , basterà all' uopo eseguire la moltiplicazione delle due frazioni fra loro. Per esempio, sia data la frazione $\frac{5}{7}$, e se ne voglia prendere la *terza parte*; si moltiplicherà $\frac{5}{7}$ per $\frac{1}{3}$, e si avrà $\frac{5}{21}$; e volendo le *due terze parti* della stessa frazione , si moltiplicherà $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{3}$, e si avrà $\frac{10}{21}$.

Il prodotto di tre frazioni è una *frazione di frazione di frazione*, poichè la moltiplicazione di tre frazioni, come, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, si esegue prendendo *i quattro quinti di due terzi*, ed indi *i cinque settimi* della frazione di frazione ottenuta, ossia prendendo *i cinque settimi de' quattro quinti di due terzi.* Laonde per prendere una frazione di frazione di una data frazione, non si farà che moltiplicare fra loro le tre frazioni enunciate. Così domandandosi i tre quarti de' quattro quindi di due terzi, sarà soddisfatto al quesito eseguendo la moltiplicazione delle frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$; il prodotto, o la frazione di frazione di frazione desiderata sarà $\frac{24}{60}$, ovvero $\frac{2}{5}$. Non è difficile estendere questo discorso ad un numero maggiore di frazioni, ed in tal modo una qualunque frazione di frazione si ridurrà per mezzo della moltiplicazione ad una frazione semplice.

§. 94. È da osservare che, *cambiando comunque l' ordine dei fattori nell' eseguire la moltiplicazione di due o più frazioni, il prodotto risulta lo stesso*, perchè esso è sempre una frazione che ha per numeratore il prodotto di tutti i numeratori, e per denominatore il prodotto di tutti i deno-

minatori, e questi due prodotti, per ciò che altrove si è dimostrato (§.86) non variano al variar di luogo de' fattori che li compongono.

Finalmente il prodotto di più frazioni si ottiene spesso con somma facilità adoperando alcune abbreviazioni dipendenti dalla citata proprietà del §. 86. Per esempio il prodotto delle frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, non eseguendo ma indicando soltanto le moltiplicazioni, è $\frac{2.4.5.3}{3.5.6.4}$, in cui potremo sostituire ai numeri 2, e 6 i prodotti equivalenti 1.2, e 3.2, e cambiare l'ordine dei fattori nel denominatore, ed otterremo, $\frac{1.2.4.5.3}{3.2.4.5.3}$. Or questa espressione è pure il prodotto delle altre frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{3}{3}$, ciascuna delle quali, eccettuata la prima, è uguale all' unità (§. 58), e quindi il prodotto medesimo si cambierà in, $\frac{1}{3}\times1\times1\times1\times1$, ovvero $\frac{1}{3}$. Un analogo procedimento potendo adoperarsi in tutti i casi simili, ci è lecito stabilire in generale che, *in una frazione, quando il numeratore non meno che il denominatore trovasi espresso da un prodotto indicato e non eseguito di più numeri fra loro, possono senza inconveniente sopprimersi tutti i fattori comuni ad ambedue i termini, qualunque sia il luogo che occupano: e se* sciogliendo *i rimanenti fattori dissimili in altri fattori più semplici, ne sorgeranno di nuovo alcuni comuni al numeratore ed al denominatore della frazione, anche questi si sopprimeranno.* Così l'espressione $\frac{3.12.7.9.11}{5.7.9.3.15.2}$ si riduce subito a $\frac{12.11}{5.15.2}$, ed indi sciogliendo i numeri 12, e 15 in fattori più semplici si ottiene $\frac{2.2.3.11}{5.3.5.\ 2}$, in cui se si sopprimeranno di nuovo i fattori comuni 2, e 3 si avrà finalmente, $\frac{2.11}{5.\ 5}$, ovvero $\frac{22}{25}$.

Le regole esposte di sopra per la moltiplicazione delle frazioni si applicano senza alcuna modificazione alle frazioni spurie; e vuolsi avvertire soltanto che laddove il prodotto di due frazioni vere è sempre minore di ciascuno de' fattori, il prodotto di una frazione vera per una frazione spuria è sempre maggiore della frazione vera e l'uguaglia nel solo caso in cui la frazione spuria pareggia l'unità.

Della moltiplicazione delle frazioni unite agl' interi.

§. 95. Le frazioni unite agl' interi si moltiplicano con le stesse regole precedenti, avvertendo di ridurre prima ad una sola frazione qualunque fattore composto d' un intero e di una frazione (§. 87). Per esempio debba moltiplicarsi $14\frac{2}{3}$ per $4\frac{1}{4}$: si ridurrà $14\frac{2}{3}$ ad una sola frazione, e si avrà $\frac{44}{3}$, si ridurrà similmente $4\frac{1}{4}$ ad una frazione e si avrà $\frac{17}{4}$; e si moltiplicheranno indi fra loro le due frazioni $\frac{44}{3}$ e $\frac{17}{4}$ che daranno per prodotto $\frac{748}{12}$ ovvero $\frac{187}{3}$, da cui estratti gl' interi si avrà $62\frac{1}{3}$. Questa operazione può anche eseguirsi moltiplicando ciascuna parte del moltiplicatore per ciascuna parte del moltiplicando, e sommando i varii prodotti

ottenuti, analogamente a ciò che si è detto per i numeri interi nel § 68: eccone alcuni esempii.

$$
\begin{array}{r}
14\ \frac{2}{3} \\
4\ \frac{1}{4} \\
\hline
56 \\
2\ \frac{2}{3} \\
3\ \frac{2}{4} \\
\frac{2}{12} \\
\hline
62\ \frac{4}{12}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
18\frac{2}{7} \\
20 \\
\hline
360 \\
5\frac{5}{7} \\
\hline
365\frac{5}{7}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
121 \\
3\frac{1}{4} \\
\hline
363 \\
30\frac{1}{4} \\
\hline
393\frac{1}{4}
\end{array}
$$

Nel primo esempio il prodotto totale $62\frac{4}{12}$, ovvero $62\frac{1}{3}$ è composto di quattro prodotti parziali, cioè dell' intero del moltiplicatore per l' intero del moltiplicando, dell' intero del moltiplicatore per la frazione del moltiplicando, della frazione del moltiplicatore per l' intero del moltiplicando, ed in fine delle due frazioni fra loro. E deve pure osservarsi che per sommare le tre frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{12}$, basta ridurre le prime due allo stesso denominatore senza incaricarsi della terza, poichè il denominatore comune al quale si perviene, essendo il prodotto de' due denominatori 3 e 4, deve risultare lo stesso del denominatore della terza frazione. Negli altri esempii si hanno due soli prodotti parziali.

Dividere un intero per una frazione ed una frazione per un' altra frazione.

§. 96. Siccome la dimostrazione della regola della divisione delle frazioni riesce alquanto difficile per i principianti, procureremo di esporla in più modi, affinchè l' allievo, giungendo per diverse vie allo stesso risultamento, resti meglio persuaso della verità che si vuol dimostrare. Premettiamo alcuni principii riguardanti la moltiplicazione e la divisione in generale.

In qualsivoglia moltiplicazione, se si moltiplica o si divide uno dei due fattori *per un numero qualunque*, il prodotto *risulta moltiplicato o diviso per lo stesso numero; e se uno dei* fattori *si moltiplica e l' altro si divide per un medesimo numero*, il prodotto *non rimane alterato*. I seguenti esempii basteranno a porre in evidenza questo fatto, del quale si troverà la ragione per poco che si rifletta al significato che nella moltiplicazione hanno il prodotto ed i suoi fattori.

Interi	*Frazioni*	
$4\times5=20$..........	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{35}$.......	(1)
$4.2\times5=40$..........	$(\frac{2}{5}.2)\times\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$.......	(2)
$\frac{4}{2}\times5=10$..........	$(\frac{2}{5}:2)\times\frac{3}{7}=\frac{3}{35}$.......	(3)
$\frac{4}{2}\times5.2=20$........	$(\frac{2}{5}:2)\times(\frac{3}{7}.2)=\frac{6}{35}$.......	(4)
$4.2\times\frac{5}{2}=20$........	$(\frac{2}{5}.2)\times(\frac{3}{7}:2)=\frac{6}{35}$.......	(5).

Considerando che in una divisione il divisore ed il quoziente sono fattori del dividendo, sarà anche facile adattare alla divisione la proprietà ora enunciata per la moltiplicazione. Potrà dunque dirsi in generale che, *in qualsivoglia divisione il* quoziente *non rimane alterato se si moltiplicano*

o si dividono ad un tempo il dividendo *ed il* divisore *per uno stesso numero; ed il* quoziente *rimane moltiplicato o diviso, secondo che si moltiplica o si divide il* dividendo, *o inversamente si divide o si moltiplica il* divisore. Le eguaglianze (2), (3) presentano il caso di un dividendo 20, e di un divisore 4 moltiplicati ambedue, o ambedue divisi per 2, senza che il quoziente 5 rimanga alterato; le stesse eguaglianze danno pure l'esempio di un quoziente 4 che risultì moltiplicato o diviso per 2, secondo che si è moltiplicato o diviso per quel numero il dividendo 20 senza alterare il divisore 5, e finalmente le eguaglianze (4), (5) fanno conoscere come il quoziente 4 rimane diviso o moltiplicato per 2 se il divisore 5 è moltiplicato o diviso per lo stesso numero. Dalle eguaglianze riguardanti le frazioni si caverebbero le medesime conseguenze.

§. 97. 1.° Ciò posto, debba dividersi la frazione $\frac{6}{35}$ per la frazione $\frac{3}{7}$. Considerando $\frac{6}{35}$ come un prodotto che ha per fattori $\frac{3}{7}$ ed il quoziente incognito, poichè il prodotto di due frazioni ha per numeratore il prodotto dei numeratori, e per denominatore il prodotto de'denominatori, il numeratore 6 rappresenterà il prodotto del numeratore 3 della frazione divisore pel numeratore del quoziente, ed il denominatore 35 sarà il prodotto di 7 pel denominatore del quoziente. Ma quando è dato un prodotto ed uno dei suoi fattori si ottiene l'altro fattore per mezzo della divisione, dunque per ottenere il numeratore ed il denominatore del quoziente bisognerà dividere 6 per 3, e 35 per 7; cioè *per dividere una frazione per un'altra, bisogna dividere numeratore per numeratore e denominatore per denominatore.* Il quoziente cercato sarà nell'esempio proposto, $\frac{2}{5}$.

Non sempre però la divisione delle frazioni si può eseguire con questa regola, perchè spesso i termini della frazione *dividendo* non possono dividersi esattamente per quelli della frazione *divisore*. Così se dovesse dividersi $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{3}$, applicando la regola precedente, il quoziente sarebbe $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{3}}$; cioè la divisione proposta si cambierebbe in quella di altre due frazioni, vale a dire di $\frac{5}{2}$ per $\frac{7}{3}$, e malgrado l'esattezza di questo risultamento, la quistione non avrebbe mutato aspetto. Ma si possono i termini della frazione *dividendo* moltiplicare per fattori tali da rendere eseguibile la divisione per i termini della frazione divisore: si prendano per fattori gli stessi termini della frazione divisore, ed il dividendo $\frac{5}{7}$ si cambierà in $\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{7 \cdot 2 \cdot 3}$, che ora si potrà dividere per $\frac{2}{3}$ mediante la regola data, e si avrà per quoziente $\frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2}$. Riflettendo che questa frazione è il prodotto della frazione $\frac{5}{7}$ per l'altra $\frac{2}{3}$ rovesciata, si potrà stabilire la regola generale che, *per dividere una frazione per un'altra si capovolge la frazione divisore. e si moltiplica per la frazione dividendo.* Debba dividersi un intero 5 per una frazione $\frac{2}{3}$; siccome un numero qualunque diviso per l'unità non cambia valore, si scriverà il 5 sotto la forma di $\frac{5}{1}$, ed applicando il ragionamento precedente alle frazioni $\frac{5}{1}$ e $\frac{2}{3}$, si giungerà alla regola che, *per dividere un intero per una frazione si moltiplica l'intero per la frazione rovesciata.*

§. 98. 2.° Sia da dividersi la frazione $\frac{5}{7}$ per l'altra $\frac{2}{3}$. Se il divisore fosse un numero intero, l'operazione potrebbe eseguirsi con la tavola del §. 61, come si è fatto avvertire nel §. 89, ma il caso del divisore

frazionario potrà ridursi facilmente a quello del divisore intero, mediante il principio esposto di sopra riguardante la divisione. In fatti si moltiplicheranno il dividendo $\frac{5}{7}$ ed il divisore $\frac{2}{3}$ pel denominatore 3 di quest' ultima frazione, e con ciò non sarà alterato il quoziente da trovarsi. La moltiplicazione indicata cambierà il dividendo in $\frac{5 \cdot 3}{7}$, ed il divisore in 2 (§. 61); e dovendo ora dividersi la frazione $\frac{5 \cdot 3}{7}$ per l' intero 2, il quoziente sarà $\frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2}$ (§. 89). Questa frazione è evidentemente il prodotto delle due $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{2}$, cioè *della frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata*, come si è veduto di sopra. Il quoziente di un numero intero 5 per una frazione $\frac{2}{3}$ si otterrà anche facilmente, perchè si potrà cambiare nel quoziente di $\frac{5}{2}$ per $\frac{1}{3}$, ossia in $\frac{5 \cdot 3}{2}$, che è il prodotto del dato numero *per la frazione divisore rovesciata*.

Qui deve farsi una osservazione importante. Dividere 5 per $\frac{1}{3}$ equivale a moltiplicare 5 per $\frac{3}{1}$, ossia per 3: ed al contrario moltiplicare 5 per $\frac{1}{3}$ equivale a dividere 5 per 3 (§. 91). Dunque nel calcolo delle frazioni, spesso la moltiplicazione si cambia in divisione, e la divisione in moltiplicazione.

§. 99. 3.° Non ometteremo, in fine, la dimostrazione diretta della sopra enunciata regola della divisione delle frazioni, quantunque alquanto astratta e difficile a concepirsi dai fanciulli.

Sia da dividersi l' intero 5 per la frazione $\frac{2}{3}$. Per la natura della divisione il numero 5 è un prodotto di cui un fattore è $\frac{2}{3}$, e si cerca l' altro fattore. Se consideriamo il fattore dato $\frac{2}{3}$ come moltiplicatore, il prodotto 5 rappresenterà le *due terze parti* del moltiplicando incognito. Quindi la metà di 5, ossia $\frac{5}{2}$, equivarrà ad *un* solo terzo del moltiplicando medesimo, e questo terzo ripetuto tre volte dovrà dare l' intero moltiplicando, che sarà perciò, $\frac{5}{2} \times 3 = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$. Dunque il quoziente della divisione di 5 per $\frac{2}{3}$ si ottiene moltiplicando l'intero 5 per la frazione $\frac{3}{2}$, che corrisponde alla frazione proposta *capovolta o rovesciata*.

Le medesime considerazioni si applicano alla divisione di una frazione per un' altra. Voglia dividersi $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{3}$; rappresenterà $\frac{2}{3}$ il moltiplicatore, e $\frac{5}{7}$ il prodotto, il quale dovrà perciò valere *due* terzi del moltiplicando incognito. Quindi, prendendo la metà di $\frac{5}{7}$, si otterrà un solo terzo del moltiplicando cercato cioè, $\frac{5}{7 \times 2}$, e triplicando questa frazione si avrà l' intero moltiplicando, ossia $\frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$. Dunque il quoziente della divisione di $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{3}$ si ottiene moltiplicando fra loro le due frazioni $\frac{5}{7}$, e $\frac{3}{2}$, cioè *la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata*.

§. 100. Da ciò che precede risulta ancora che, *quando le frazioni da dividersi una per l' altra hanno lo stesso denominatore, il quoziente si ottiene con la divisione del numeratore della frazione dividendo pel numeratore della frazione divisore; e quando hanno lo stesso numeratore, il quoziente si ottiene con la divisione del denominatore della frazione divisore pel denominatore della frazione dividendo*. In fatti, se le frazioni sono $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{7}$, applicando la regola generale si avrà $\frac{5}{7} : \frac{3}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 3} = \frac{5}{3}$ (§. 94); cioè il quoziente si ottiene dividendo 5 per 3. Ed allo stesso modo, se le frazio

ni sono $\frac{5}{7}$ e $\frac{5}{3}$, la regola darà, $\frac{5}{7}:\frac{5}{3}=\frac{5}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$, il che mostra che il quoziente risulta dalla divisione di 3 per 7.

Della divisione delle frazioni unite agl' interi.

§. 101. Quando il dividendo, o il divisore, oppure ambedue sono composti di un intero e di una frazione, prima di eseguire la divisione si riduce l'intero e la frazione ad una sola frazione (§. 87). Per esempio dovendo dividersi $4\frac{3}{4}$ per $2\frac{2}{3}$, si riduce $4\frac{3}{4}$ ad una sola frazione, e si ha $\frac{19}{4}$; si riduce del pari $2\frac{2}{3}$ ad una sola frazione, e si ha $\frac{8}{3}$; dopo di ciò si dividono le due frazioni $\frac{19}{4}$ ed $\frac{8}{3}$ una per l'altra, come insegna la regola precedente. Se il quoziente risulta una frazione spuria, si riduce ad un intero più una frazione vera per mezzo della divisione (§. 81).

CAPO IV.

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

Origine delle frazioni decimali.

§. 102. Il sistema decimale di numerazione (§. 4.) dà origine ad una specie di frazioni, il calcolo delle quali, sebbene dipenda dalle regole esposte di sopra per le frazioni in generale, offre però alcune agevolazioni importanti che derivano dal modo particolare in cui si suppone divisa l'unità.

Come ne'numeri interi, progredendo dalla sinistra verso la destra, ogni unità contiene dieci volte la sua vicina, per esempio un migliaio contiene dieci centinaia, un centinaio contiene dieci decine ed una decina contiene dieci unità semplici; così continuando la progressione delle unità sempre dieci volte più piccole una dell'altra, si è considerata l'unità semplice composta di dieci parti eguali, ognuna delle quali è un *decimo* della unità medesima; indi si è supposto il decimo composto di dieci parti eguali, ognuna delle quali è per conseguenza la decima parte di un decimo ossia un *centesimo* dell'unità; il centesimo composto di dieci parti eguali, ognuna delle quali è la decima parte di un centesimo, ovvero un *millesimo* dell'unità, e così di seguito. Queste frazioni si chiamano *decimali* perchè hanno origine dalla divisione successiva dell'unità, e delle sue parti sempre in dieci altre parti più piccole.

Maniera di scrivere le frazioni decimali, e loro relazione con le frazioni ordinarie.

§. 103. Le frazioni, un *decimo*, un *centesimo*, un *millesimo*, un *diecimilesimo etc.* costituiscono, come abbiamo veduto una progressione di unità delle quali ciascuna ha un valore sempre dieci volte minore della precedente, e perciò possono scriversi una alla destra dell'altra, come si fa de' numeri interi, per le diverse classi di unità andando dalla sinistra verso la destra. Si situeranno dunque i decimi alla destra degl' interi, i centesimi alla destra de' decimi, i millesimi alla destra dei centesimi ec.

separando con una virgola gl' interi dalle frazioni decimali. La progressione generale delle unità intere e frazionarie conterrà perciò due progressioni che cominciano dall' unità semplice, e si estendono indefinitamente, una verso la sinistra, e l' altro verso la destra, come quì sotto;

etc.	1	1	1	1	1	,	1	1	1	1	*etc.*
	decina di migliaja	*migliajo*	*centinajo*	*decina*	*unità*		*decimo*	*centesimo*	*millesimo*	*diecimilesimo*	

Da questa serie apparisce chiaramente che le frazioni decimali si compongono le une per mezzo delle altre appunto come i numeri interi. Così un decimo contiene 10 centesimi, ovvero 100 millesimi, ovvero 1000 diecimilesimi etc. un centesimo contiene 10 millesimi, ovvero 100 diecimilesimi, ovvero 1000 centomilesimi etc.; un millesimo contiene 10 diecimilesimi, ovvero 100 centomilesimi etc.

§. 104. Dopo di ciò sarà facile scrivere qualunque *decimale*, intendendo con questa parola una frazione decimale, oppure un intero unito ad una frazione decimale. Per esempio 54 interi e 25 centesimi si scriveranno così, 54,25; dove si è situata la cifra 2 nel luogo de' decimi, perchè 20 centesimi sono la stessa cosa di due decimi. Similmente 325 diecimilesimi si scrivono così, 0,0325; dove mancando gl'interi e i decimi, si è supplito il luogo dei primi con uno zero, per poter situare la virgola che separa gl' interi da' decimali, ed il luogo de' secondi con un altro zero, per conservare ai diecimilesimi il quarto luogo dopo la virgola; e si sono anche poste le cifre 3, e 2 nel secondo e nel terzo luogo, perchè 300 diecimilesimi sono lo stesso di 3 centesimi, e 20 diecimilesimi sono lo stesso di 2 millesimi. Dunque *volendo scrivere qualunque decimale, dovrà separarsi la parte intera dalla frazionaria con la virgola, e scrivere poi le frazione decimale come se fosse un intero, avendo l' avvertenza di situare l' ultima cifra a destra nel luogo che le compete secondo la sua denominazione, e di riempiere con zeri i luoghi vuoti dopo la virgola, se ve ne sono. Mancando gl' interi si scriverà un zero avanti la virgola.*

La pratica di scrivere i decimali guida anche alla lettura di essi. Così 59,0063 si legge *cinquantanove e sessantatre diecimilesimi*, e 0,000063 si pronunzia *sessantatre milionesimi*.

§. 105. Paragonando i decimali

1.°.........54,25
2.°......... 0,0325
3.°.........59,0063
4.°......... 0;000063

scritti sotto forma d' interi, con le espressioni equivalenti,

1.ª.........$54\frac{25}{100}$, ovvero $\frac{5425}{100}$,
2.ª.........$\frac{325}{10000}$
3.ª.........$59\frac{63}{10000}$, ovvero $\frac{590063}{10000}$,
4.ª.........$\frac{63}{1000000}$

scritte sotto forma di frazioni ordinarie, si vede subito che il numeratore di ognuna delle frazioni ordinarie non è altro che il decimale corrispondente in cui si è soppressa la virgola, ed il denominatore è formato dall' unità seguita da tanti zeri quante cifre contiene il decimale medesimo dopo la virgola. Onde potranno stabilirsi le seguenti regole generali; *per rappresentare un decimale sotto la forma di frazione ordinaria, bisogna dare per denominatore alle cifre che esso contiene l' unità seguita da tanti zeri quante cifre decimali si contano dopo la virgola, la quale si sopprime;* e viceversa *per ridurre sotto forma intera una frazione ordinaria che ha per denominatore l' unità seguita da uno o più zeri, si sopprime questo denominatore, e nel numeratore si situa la virgola in modo che rimangano separate tante cifre decimali, quanti zeri si contavano nel denominatore della frazione ordinaria.*

Una frazione decimale non si altera se alla sua destra si aggiungono o si sopprimono uno o più zeri.

§. 106. Per ciò che si è detto nel §. precedente, aggiungendo o sopprimendo uno o più zeri a destra di un decimale qualunque si vengono ad aggiungere o a sopprimere altrettanti zeri nel denominatore corrispondente, il che non altera il valore del decimale. Sia data, in fatti, la frazione decimale 0,310. La frazione ordinaria corrispondente sarà $\frac{310}{1000}$. Ora, si sa che una frazione non cambia di valore, se i suoi termini si moltiplicano o si dividono per lo stesso numero: perciò dividendo i termini della frazione $\frac{310}{1000}$ per 10, o moltiplicandoli per 10,100 etc., si avranno le frazioni ordinarie $\frac{310}{1000}$, $\frac{31}{100}$, $\frac{3100}{10000}$, $\frac{31000}{100000}$, tutte eguali fra loro ed eguali fra loro saranno pure tutte le frazioni decimali corrispondenti 0,310; 0,31; 0,3100; 0,31000.

Dell' addizione de' decimali.

§. 107. L'addizione dei decimali si esegue perfettamente come quella de' numeri interi, poichè le parti decimali si compongono le une per mezzo delle altre nello stesso modo delle unità intere (§. 102). Deve solo aversi l' avvertenza di situare i numeri in modo che corrispondano i decimi sotto ai decimi, i centesimi sotto ai centesimi, e così di seguito. Per esempio,

$$\begin{array}{r@{\,,\,}l} 4 & 0301 \\ 13 & 03 \\ 24 & \\ 3 & 00002 \\ \hline 44 & 06012 \end{array}$$

Della sottrazione de' decimali.

§. 108. La sottrazione dei decimali si esegue come quella de' numeri interi, avvertendo soltanto di eguagliare per mezzo di zeri il numero delle cifre decimali del sottrattore e del sottraendo, quando occorre. Per esem-

pio dovendo sottrarre 24,0031 da 35,03 si aggiungeranno due zeri a quest' ultimo numero, e l'operazione si eseguirà come qui appresso;

35,0300
24,0031
11,0269

Si farà allo stesso modo se uno de' numeri non contiene decimali. Così dovendo togliere 0,3429 da 35, si avrà,

35,0000
0,3429
34,6571

Del complemento aritmetico.

§. 109. Accade spesso che uno o più numeri debbono togliersi dalla somma di altri numeri. Così l'espressione,

34,531+2,37—10,35—4,8,

indica che devono sommarsi i duo numeri 34,531 e 2,37, che dalla somma ottenuta deve togliersi 10,35, e da ciò che rimane deve pure sottrarsi 4,8; dimodochè l'operazione proposta si compone di tre operazioni, cioè di una somma e di due sottrazioni, come segue;

34,531
2,37
36,901
10,35
26,551
4,8
21,751

Ma in questi casi si può giungere più brevemente al risultamento finale facendo uso del *complemento aritmetico*.

§. 110. *Il resto della sottrazione di un numero qualunque dall' unità seguita da uno a più zeri dicesi complemento aritmetico di quel numero.* Per esempio il complemento di 10,35 è 89,65, che si ottiene sottraendo 10,35 da 100; il complemento di 4,8 è 5,2, resto della sottrazione di 4,8 dal 10, e può essere ancora 95,2 resto della sottrazione di 4,8 da 100, con la differenza che il numero 5,2 si chiama complemento al 10, e l'altro 95,2 dicesi complemento *al 100. Prendere il complemento* di un dato numero significa eseguire la sottrazione ora indicata, *e questa operazione* è così facile, che con un poco di pratica si esegue a mente, poichè *si riduce a sottrarre da 9 ciascuna cifra del numero proposto cominciando dalla sinistra, all' infuori dell'ultima significativa che si sottrae da 10.* Così il complemento a 10000 del numero 5320 è 4680, e si ottiene togliendo successivamente da 9 le cifre 5 e 3, e da 10 l'ultima cifra significativa 2. È chiaro però che se dovesse prendersi il complemento di 5320 è 100000, esso sarebbe 94680, ed il complemento ad 1000000 sarebbe 994680; cioè in questi casi alla sinistra del complemento del numero proposto, preso a mente nel modo indicato, dovranno scriversi uno o più 9, sino a che il numero totale delle cifre del complemento medesimo pareggi il numero degli zeri da cui è seguita l'unità prescelta.

§. 111. Ciò premesso, è facile persuadersi che ogni sottrazione si cangia in addizione mediante il complemento aritmetico. Per esempio volendo sottrarre 10,350 da 36,901, si aggiungerà a quest'ultimo il complemento di 10,350, a 100, cioè 89,650, e si otterrà la somma 126,551 la quale supera il vero risultamento di 100, ossia del-

Sottrazione facenda uso del complemento	*Sottrazione ordinaria*
36,901	36,901
89,650	10,350
126,551	26,551

l' unità sulla quale si è preso il complemento. Ed infatti 89,650 non è che 100 diminuito di 10,350, e quindi aggiungere 89,650 a 36,901 vale lo stesso che aggiungervi 100 e toglierne 10,350, o inversamente, toglierne 10,350 ed aggiungervi 100, dunque il risultamento dell' addizione di 36,901 con 89,650, cancellandone l' unità sulla quale si è preso il complemento, equivale al resto della sottrazione proposta.

Similmente la sottrazione di 4,8 da 26,551 si eseguirà come qui appresso;

26,551
95,2
121.751

Ma l' uso del complemento aritmetico risulta di poco o nessun vantaggio nelle operazioni isolate, e la sua maggiore utilità si manifesta in vece quando si cerca il risultamento di più addizioni e sottrazioni successive, potendo allora ridursi tutte quelle operazioni ad una sola addizione. Riprendiamo l' espressione,

34,531+2,37−10,35−4 8

ed in vece di eseguire come sopra un' addizione e due sottrazioni, potremo secondo gli esposti principii eseguire soltanto l' addizione di quattro numeri cioè, di 34,531, di 2,37, del complemento di 10,35, e del complemento di 4,8 presi ambidue sopra 100; si avrà,

34,531
2,37
.89,65
.95,2
221,751

e togliendo le due unità introdotte dai due complementi, ognuna delle quali si è notata con un puntino, il risultamento finale sarà 21,751.

Per ultimo esempio debbano eseguirsi le operazioni indicate nell' espressione,

45430,13−999.15+103,53−54,007−2035,2,

le quali considerate nel loro insieme prendono il nome di *riduzione*. Usando il complemento aritmetico la *riduzione* proposta si cambierà nella seguente addizione,

45430,13
.9000,85
103,53
.9945,993
.7964,8
72445,303

Risultamento 42445,303

Deve avvertirsi che per evitare ogni confusione, è necessario che in simili operazioni i complementi si prendano tutti sopra unità della stessa classe.

Alterazione che soffre un decimale variando di luogo la virgola.

§. 112. Prendiamo per esempio il numero 34,27. Trasportando la virgola un luogo più a destra si ha 342,7, ed è chiaro che la cifra 2 che rappresentava decimi, rappresenta ora unità; la cifra 4 che rappresentava unità, rappresenta ora decine, e la cifra 3 che rappresentava decine rappresenta centinaia; e finalmente la cifra 7 a destra della virgola rappresentava centesimi, ed ora rappresenta decimi. Dunque ogni cifra del numero proposto è divenuta dieci volte maggiore, e perciò il numero stesso col cambiamento della virgola è divenuto dieci volte maggiore di quello che era prima. Trasportando la virgola due luoghi più a destra, si ha 3427. Questo numero è dieci volte maggiore di 342,7, e cento volte maggiore di 34,27. Dunque trasportando la virgola di un luogo verso la destra, il numero cresce dieci volte, trasportandola di due luoghi cresce cento volte etc.

Con un simile esame si vede subito che trasportando la virgola di un luogo a sinistra, trasportandola di due luoghi etc. il numero diminuisce dieci volte, cento volte etc. Così il numero 3,427 è dieci volte minore di 34,27; e l'altro 0,3427 è dieci volte minore di 3,427, e cento volte minore di 34,27.

§. 113. Un decimale in cui si sopprime la virgola, si cambia in un numero intero, e rimane con quella operazione moltiplicato per l'unità seguita da tanti zeri quante cifre si contavano a destra della virgola; perchè sopprimere la virgola in un decimale equivale a trasportarla a destra dopo tutte le cifre decimali, siccome si è praticato di sopra col decimale 34,27 quando si è mutato nel numero intero 3427. Potrebbe anche dirsi che sopprimendo la virgola in un decimale, si viene a sopprimere il denominatore nella frazione ordinaria che gli corrisponde, per cui quella frazione, la quale si cambia in un intero, rimane moltiplicata pel denominatore che prima aveva.

Viceversa, *se voglia dividersi un intero per l'unità seguita da uno o più zeri, basterà separare con una virgola tante cifre alla destra del numero quanti sono gli zeri*. Così volendo dividere 347 per 1000, si scriverà 0,347 per quoziente; questa operazione si riduce a trasportare la virgola di tre luoghi verso la sinistra, e si è già valutato più sopra l'effetto di un tal movimento della virgola. Lo stesso numero diviso per 10000 darebbe 0,0347, e diviso per 100000 darebbe 0,00347. E potrebbe anche riconoscersi l'esattezza di queste operazioni riflettendo che i decimali 0,0347, e 0,00347 corrispondono alle frazioni ordinarie $\frac{347}{10000}$ e $\frac{347}{100000}$, che rappresentano appunto la *diecimillesima* e la *centomilesima* parte del numero 347.

Della moltiplicazione de' decimali.

§. 114. Siano da moltiplicarsi fra loro i decimali 4,21 e 5,3; sopprimendo la virgola in entrambi, il primo rimarrà moltiplicato per 100 ed il secondo per 10 (§. 113); e per ciò che si è detto nel §. 96, il prodotto de' nuovi due fattori 421 e 53 risulterà eguale a quello dei decimali proposti moltiplicato prima per 100 e poi per 10, ossia moltiplicato per 1000. Eseguita la moltiplicazione de' numeri interi 421 e 53, si ottiene 22313, e questo numero dovendo essere 1000 volte maggiore del prodotto dei decimali 4,21 e 5,3, per ridurlo al giusto valore basterà dividerlo per 1000, con separare tre cifre decimali alla sua destra (§.113); si otterrà così il prodotto esatto 22,313. Dunque in generale *per moltiplicare fra loro due decimali, si considera soppressa la virgola in ciascuno di essi, e si moltiplicano come se fossero numeri interi; indi nel prodotto ottenuto si separano tante cifre decimali quanto ne contenevano insieme i due fattori.*

Questa regola potrebbe anche agevolmente dimostrarsi ponendo i decimali sotto forma di frazioni ordinarie. La moltiplicazione di 4,21 per 5,3 equivale a quella di $\frac{421}{100}$ per $\frac{53}{10}$, che si esegue moltiplicando fra loro i numeri interi 421,53, e dividendo il prodotto ottenuto 22313 per 1000, con separare in esso tre cifre decimali, come già si è detto.

Per un altro esempio debba moltiplicarsi 0,0027 per 0,035; si farà come segue,

```
  0,0027
  0,035
---------
     135
     81
---------
0,0000945
```

dove si vede che per dare al prodotto tante cifre decimali quante ne contenevano insieme i due fattori, si sono suppliti con zeri i luoghi mancanti di cifre significative.

Maniera di ridurre una frazione ordinaria qualunque in frazione decimale.

§. 115. Per ridurre una frazione ordinaria qualunque in frazione decimale bisogna ricordarsi che ogni frazione ordinaria rappresenta una divisione che non potendo eseguirsi, rimane soltanto indicata (§. 58.). Così $\frac{3}{8}$ significa 3 diviso per 8, la quale divisione non potendo eseguirsi, rimane sotto la forma di $\frac{3}{8}$. Ma si può col soccorso delle frazioni decimali eseguire la divisione indicata di 3 per 8. Infatti, si supponga il numeratore 3 ridotto in 30 decimi, ed allora la divisione si potrà eseguire, e si avrà per quoziente 3 decimi con un resto di 6 decimi. Riduciamo questo resto in 60 centesimi, e continuando la divisione, avremo per quoziente 7 centesimi con un resto di 4 centesimi. Riduciamo questo resto in 40 millesimi, e continuando la divisione avremo per quoziente 5 millesimi, senza resto. Dunque la divisione di 3 per 8 eseguita coll'aiuto delle frazioni decimali dà un quoziente composto di 3 decimi, 7 centesimi, e 5 millesimi, ossia dà per quoziente 0,375; e perciò la frazione $\frac{3}{8}$ eguaglia la frazione decimale 0,375, come può verificarsi riducendo a minimi termini la frazione $\frac{375}{1000}$. L'operazione descritta è la seguente;

```
3,0      8
 60    -----
  40   0,375
   0
```

Quindi, *per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale basta dividere il numeratore pel denominatore, riducendo successivamente in decimi, centesimi, millesimi etc. le parti del numeratore medesimo, onde poter eseguire la divisione.*

Secondo questa regola, volendo valutare in decimale la frazione annessa al quoziente di una divisione qualunque, non deve farsi altro che continuare la divisione stessa, con aggiungere al resto un zero, ed ottenendo un secondo resto aggiungervi un altro zero, e così di seguito, come può osservarsi nel seguente esempio;

```
                91       8
                11     ------
Resto.........  3,0    11,375
                 60
                  40
                   0
```

Dovendo ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{3}{80}$, è da notare che il numeratore ridotto in decimi è ancora così piccolo da non potersi eseguire la divisione, per cui si deve ridurre in centesimi; per ciò nel quoziente non vi sono decimi, e bisogna scrivere uno zero nel loro luogo, come nell' operazione qui appresso;

```
3,00        80
 600      ------
  400     0,0375
   00
```

Similmente la frazione $\frac{3}{800}$ ridotta in decimali darebbe 0,00375. Ma in queste due ultime riduzioni, dopo aver aggiunti al dividendo tanti zeri quanti sono necessarii per determinare il luogo della prima cifra significativa del quoziente, la divisione potrà eseguirsi con maggior semplicità sopprimendo a destra del divisore e del dividendo un egual numero di zeri, senza però alterare il luogo delle cifre del quoziente già prima determinato.

§. 116. L'operazione di convertire una frazione ordinaria in frazione decimale riducesi a valutare la frazione proposta in decimi, o centesimi o millesimi etc., secondo l'approssimazione che si desidera. Ma potrebbe, più generalmente, domandarsi di *valutare una data frazione in parti dell' unità di determinata denominazione*. Per esempio sia da valutarsi la frazione $\frac{3}{4}$ in *sessantesimi*; in tal caso in vece di moltiplicare il numeratore per 10, per 100, o per 1000 etc., si moltiplicherà per 60 o si dividerà pel denominatore. Eseguita l'operazione si ottiene 45 per quoziente, d'onde si può conchiudere che $\frac{3}{4}$ equivalgono a $\frac{45}{60}$. Spesso la divisione non è esatta, e ciò avviene quando il denominatore della proposta frazione, ridotta ai suoi minimi termini, non è divisore esatto del numero pel quale si moltiplica il numeratore, cioè del nuovo denominatore imposto alla frazione. Così volendo ridurre $\frac{3}{4}$ in venticinquesimi, non può ottenersi una frazione perfettamente equivalente alla proposta, giacchè 75 non è divisibile esattamente per 4; la frazione *approssimata* che ne risulta è $\frac{19}{25}$, e si adotta per numeratore 19 e non 18, perchè il quoziente completo della divisione di 75 per 4 essendo $18\frac{3}{4}$, si approssima più a 19 che a 18.

Della divisione de' decimali.

§. 117. La divisione di un decimale per un numero intero può eseguirsi con le stesse avvertenze usate qui sopra per ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria annessa al quoziente di una divisione qualunque. In fatti, se in vece di eseguire, come nell' esempio addotto, la divisione di 91 per 8, si dovrà dividere per questo medesimo numero il decimale 91,46, l'operazione procederà nel modo indicato, se non che in luogo di aggiungere al resto 3 uno zero, gli si porrà a fianco la cifra 4 de' decimi contenuti nel dividendo, e si avranno così 34 decimi da dividere per 8, la quale operazione eseguita, darà 4 decimi per quoziente e 2 decimi per resto. A lato di questa cifra si scriveranno i 6 centesimi del dividendo, ed eseguita la divisione dei 26 centesimi per 8 si otterranno 3 centesimi per quoziente, e 2 centesimi per resto. Esaurite così

```
91,46        8
11        -------
 3,4      11,4325
  26
   20
    40
     0
```

le cifre decimali del dividendo, se si vorrà una maggiore approssimazione, si aggiungerà all'ultimo resto un zero e si continuerà la divisione come si è praticato per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale.

§. 118. Può accadere che anche il divisore contenga cifre decimali, ma questo caso si cambierà subito nel precedente riducendo il divisore a numero intero. Dovendo, a cagion d'esempio, dividere il decimale 91,46 per l'altro 8,25, si ridurrà il divisore a numero intero trasportando la virgola due luoghi a destra, e si eseguirà nel dividendo lo stesso trasporto di virgola. Con questa operazione il dividendo ed il divisore risulteranno moltiplicati ambedue per 100, (§. 112) ed il quoziente rimarrà inalterato, secondo il principio del §. 96.

Sia inoltre da dividersi 3,253 per 21,37; sarà lo stesso che dividere 325,3 per 2137, ed il quoziente si otterrà con la regola data di sopra per la divisione di un decimale per un intero. Nel caso attuale però, il dividendo essendo minore del divisore, bisognerà servirsi della cifra 3 dei decimi per eseguire la divisione, per cui la prima cifra significativa del quoziente esprimerà decimi. Similmente, se dovesse dividersi 0,3253 per 21, 37, l'operazione si ridurrebbe a dividere 32.53 per 2137; ma qui per eseguire la divisione bisognerà servirsi della cifra de' centesimi, per cui la prima cifra significativa del divisore esprimerà centesimi. Laonde si potrà stabilire la seguente regola generale per la divisione dei decimali. *Per dividere un decimale per un altro, bisogna ridurre il divisore a numero intero, trasportando convenientemente la virgola anche nel dividendo, ed eseguire poi la divisione come si fa co' numeri interi, avvertendo di dare alla prima cifra significativa del quoziente il luogo, rispetto alla virgola, che occupa l'ultima cifra a dritta del primo dividendo parziale rispetto alla virgola trasportata.*

Per un altro esempio, debba dividersi 0,325 per 21,37: sarà lo stesso che dividere 32,5 per 2137, ma questa operazione non potrà eseguirsi senza aggiungere uno zero al dividendo nel luogo de' centesimi, per cui l'ultima cifra del primo dividendo parziale esprimendo centesimi, la prima cifra significativa del quoziente esprimerà pure centesimi.

§. 119. Si potrebbe immediatamente cambiare la divisione di due decimali in quella di due numeri interi uguagliando con l'aggiunta di alcuni zeri il numero delle cifre decimali del dividendo e del divisore, e sopprimendo la virgola in entrambi, ed a ciò si riduce la regola precedente quando il divisore contiene più cifre decimali del dividendo; ma nella ipotesi contraria la divisione diventerebbe senza necessità più complicata, acquistando il divisore un maggior numero di cifre. Così se dovesse dividersi 34,256 per 7,3, uguagliando le cifre e sopprimendo la virgola, i due numeri diverrebbero 34256 e 7300, ed ognun vede che questa divisione è più penosa dell'altra di 342,56 per 73.

Finalmente potrebbe dirsi che siccome il numero delle cifre decimali di un prodotto si ottiene sommando i numeri di cifre decimali de' due fattori, così il numero di cifre decimali di un quoziente dovrebbe aversi sottraendo dal numero delle cifre decimali del dividendo quello delle cifre decimali del divisore: ma questa regola non potrebbe applicarsi che in pochi casi, e per renderla generale bisognerebbe avvalorarla di molte avvertenze che le farebbero perdere la sua apparente semplicità. Così se dovesse dividersi 4567,21 per 3,1415, l'indicata sottrazione di cifre sarebbe impossibile, e bisognerebbe in vece cambiare la proposta divisione in

quella di due numeri interi, uguagliando il numero delle cifre decimali del dividendo e del divisore; ed in altri casi si dovrebbe operare in altro modo, come quando dovesse dividersi 3,24 per 527,3. Per questa ragione noi abbiamo preferito di far dipendere la divisione dei decimali dalla riduzione di una frazione ordinaria in frazione decimale.

Se si vol esse però con anticipazione definirs il numero di cifre decimali da darsi al quoziente, si potrebbe preparare il dividendo in modo che contenesse tante cifre decimali quante ne contengono insieme il divisore ed il quoziente. Così nello esempio precedente, se si vuole che il quoziente di 4567,21 per 3,1415 sia esteso sino ai centesimi, bisognerà che il dividendo contenga sei cifre decimali, e quindi si dovranno aggiungere quattro zeri alla sua destra; eseguita poi la divisione come sui numeri interi, dovranno separarsi due cifre decimali nel quoziente. Questo modo di operare è applicabile a tutti i casi, ma ha l'inconveniente di doversi anticipatamente assicurare se il quoziente può avere il numero di cifre decimali che si desidera, o debba necessariamente averne un numero maggiore. Per esempio il quoziente di 4,56 per 7128,3, essendo 0,000639...non potrebbe limitarsi ai centesimi o al millesimi, ma dovrebbe avere almeno quattro cifre decimali.

Delle frazioni decimali periodiche.

§. 120. Riducendo una frazione ordinaria in frazione decimale spesso si osserva che nel quoziente ritornano le stesse cifre. Per esempio $\frac{12}{37}$ sviluppata in frazione decimale dà, 0,324324324 etc. dove le cifre 324 son ripetute di seguito ed all'infinito, poichè nella divisione di 12 per 37 dopo le prime tre cifre del quoziente, si ha un resto 12, e la divisione comincia da capo con lo stesso ordine sino ad aversi un secondo resto 12, e dopo tre altre cifre un terzo resto 12, e così all'infinito. Le frazioni decimali in cui le cifre sono ripetute a questo modo si chiamano *periodiche* e le cifre che si ripetono prendono il nome di *periodo*. La suddetta frazione 0,324324324 etc. è dunque una frazione periodica, ed il periodo è 324. Riducendo in decimale la frazione $\frac{5}{11}$ si ha 0,45454545 etc. ed il periodo è 45, e così di altre.

Le frazioni decimali periodiche comunque si spezzino non rappresentano mai con esattezza le frazioni ordinarie da cui derivano. In fatti, prendiamo per esempio la frazione $\frac{1}{3}$ che sviluppata in frazione decimale dà 0,333333 etc. all'infinito; se si cercasse di sapere dopo qual numero di cifre questa frazione decimale eguaglia esattamente la frazione $\frac{1}{3}$, esaminata attentamente la cosa, si vedrebbe che non la eguaglia mai. Imperocchè, prendiamo una sola cifra, ed avremo 0,3 ovvero $\frac{3}{10}$, che potrà paragonarsi ad $\frac{1}{3}$ con ridurre le due frazioni allo stesso denominatore; le frazioni ridotte saranno $\frac{9}{30}$ e $\frac{10}{30}$ da cui apparisce che la frazione decimale 0,3 è minore di $\frac{1}{3}$, e la differenza fra le due è $\frac{1}{30}$. Prendiamo due cifre, cioè 0,33 che corrisponde a $\frac{33}{100}$; le frazioni $\frac{33}{100}$ e $\frac{1}{3}$ ridotte allo stesso denominatore si cambiano in $\frac{99}{300}$ e $\frac{100}{300}$, ed il paragone di queste due ultime frazioni ci avverte che 0,33 è minore di $\frac{1}{3}$, e la differenza è $\frac{1}{300}$. Prendiamo tre cifre 0,333, e troveremo questa frazione anche minore di $\frac{1}{3}$, ma la differenza sarà di $\frac{1}{3000}$ soltanto. Continuando a questo modo, troveremo sempre la frazione decimale più piccola della frazione ordinaria, ma la differenza andrà pure sempre diminuendo, sine a ridursi piccolissima e trascurabile. Laonde potremo conchiudere che, *ogni frazione decimale periodica, limitata ad un certo numero di cifre, non può mai rappresentare con esattezza la frazione ordinaria da cui deriva, ma si*

accosta ad essa sempre più sino a differirne per una quantità piccolissima e trascurabile, secondo che si prende un numero maggiore di cifre decimali. La frazione ordinaria alla quale il valore della corrispondente frazione decimale si avvicina continuamente, senza mai poterla raggiungere, dicesi *limite* della frazione decimale; e qui deve notarsi che la parola *limite* è presa in un significato alquanto diverso da quello usato nel linguaggio ordinario, intendendosi comunemente per limite un ostacolo o un termine cui si può giungere, ma che non si può oltrepassare.

§. 121. *Volendo di una frazione decimale, periodica o qualunque, prendere un determinato numero di cifre, nel trascurare le altre si deve avere l'avvertenza di aggiungere una unità all'ultima cifra che si ritiene, quante volte ciò che si trascura supera i $\frac{5}{10}$ di quella unità.* Così per esempio se dovessero prendersi tre sole cifre della frazione 0,454545, si adotterebbe 0,455 per frazione *approssimata*, essendo il valore delle cifre trascurate maggiore di $\frac{5}{10}$ di millesimo: ma se volesse spezzarsi la frazione alle quattro cifre, si dovrebbe adottare 0,4545, per essere il valore delle rimanenti cifre 0,000045 minore di mezzo diecimilesimo. È facile concepire la ragione di questa pratica: nell'esempio precedente la frazione abbreviata 0,455 che si adotta, quantunque maggiore della proposta 0,454545 si approssima ad essa più di 0,454, perchè la differenza fra 0,455 e 0,454545 è 0,000455, laddove la differenza fra 0,454545, e 0,454 è 0,000545; al contrario adottando le quattro cifre 0,4545 non deve aggiungersi l'unità ai diecimilesimi perchè con quell'aumento si commetterebbe un errore *in più* di 0,000055, quando ritenendo le cifre quali sono si commette un errore *in meno* di soli 0,000045. La regola ora esposta è *fondamentale nelle approssimazioni aritmetiche*; essa riceve continue applicazioni nel calcolo numerico, anche trattandosi di frazioni ordinarie o di numeri interi. Così, volendo valutare in numeri interi l'espressione numerica $55\frac{4}{7}$, si adotterà il numero 56, e non il 55, perchè la frazione $\frac{4}{7}$ che si trascura è maggiore di $\frac{1}{2}$; parimente se per concepire con più facilità il valore della frazione molto complessa $\frac{354}{2573}$ si dividessero i suoi termini per 118, si otterrebbe l'espressione $\frac{3}{21\frac{95}{118}}$, che si dovrebbe considerare come $\frac{3}{22}$, per essere la frazione $\frac{95}{118}$ aggiunta al denominatore 21 maggiore di $\frac{1}{2}$; e da ultimo se volesse esprimersi in migliaia la forza di un esercito composto di 35614 uomini, non si direbbe già che l'esercito consta di 35 *mila* uomini, ma sibbene di 36 *mila*, perchè il valore delle cifre numeriche che occupano le tre classi da sopprimersi eccede il mezzo migliaio. Da questa regola, osservata generalmente, risulta che, ***un decimale o un numero il quale, per semplicità di calcolo, rappresenta il compendio di una espressione numerica più complicata, non può contenere un errore più grande di*** mezza unità ***nell'ultima cifra a destra.***

§. 122. Si potrebbe domandare d'onde avviene che alcune frazioni ordinarie si riducono in frazioni decimali di un limitato numero di cifre, e per altre la divisione ed il numero delle cifre decimali procede all'infinito. Per dar ragione di questa differenza prendiamo una frazione ordinaria ridotta alla sua più semplice espressione, per esempio $\frac{24}{175}$; e rappresentandone il numeratore ed il denominatore col prodotto de' loro divisori semplici (§. 72) si avrà $\frac{24}{175}=\frac{2.2.2.3}{5.5.7}$, dove si osserva che i fattori

componenti il denominatore sono tutti diversi da quelli del numeratore, per essere la frazione ridotta o' suoi minimi termini. Or l' operazione di ridurre la frazione ordinaria in decimale consiste nell' eseguire la divisione del numeratore pel denominatore con moltiplicare il primo per 10, 100, 1000 etc. secondo che si desidera maggiore approssimazione; il che equivale ad introdurre nel numeratore i fattori 2, o 5 una o più volte, perchè moltiplicare un numero per 10 è lo stesso che moltiplicarlo per 2 o per 5, moltiplicarlo per 100 vale moltiplicarlo per 10 due volte, ossia moltiplicarlo due volte per 2 ed altrettante per 5, e così di seguito. Dunque, se moltiplicheremo successivamente per 10 anche il denominatore della frazione $\frac{24}{175}$, per conservarne inalterato il valore, la medesima si cambierà in $\frac{2.2.2.3\times2.5.2.5.2.5 etc.}{5.5.7.\times10.10.10 etc.}$, ovvero cancellando i fattori 5,5 comuni al numeratore e al denominatore (§. 94) si avrà, $\frac{2.2.2.3\times2.2.2.5 etc.}{7\times1000 etc.}$

Dalla quale espressione apparisce chiaramente che la successiva moltiplicazione per 10, comunque protratta indefinitamente, non potendo mai introdurre nel numeratore fattori diversi da' numeri 2 e 5, non sarà valevole ad annullare nel denominatore il fattore 7; quindi il quoziente della divisione prolungata, che vien rappresentata dalla stessa frazione $\frac{2.2.2.3\times2.2.2.5 etc.}{7\times1000 etc.}$, non potrà mai esser ridotto ad una frazione avente per denominatore l' unità seguita da zeri, cioè ad un numero intero di millesimi o di diecimilesimi, o di centomilesimi etc. e la divisione non terminerà mai.

Al contrario quando il denominatore della proposta frazione ordinaria sarà composto per mezzo de' fattori 2 e 5, in qualunque numero essi siano, o comunque ripetuti, la moltiplicazione successiva del numeratore per 10 giungerà sempre ad annullarli, e la divisione avrà un termine. Così la frazione $\frac{231}{250}=\frac{3.7.11}{2.5.5.5}$ dovrà ridursi a frazione decimale di un limitato numero di cifre, e propriamente a millesimi, perchè tre moltiplicazioni per 10 bastano ad eliminare i fattori 2,5,5,5 del denominatore. Dunque in generale, *una frazione che ha il denominatore composto di fattori primi non contenuti nel numeratore a diversi da' numeri 2 e 5, non può ridursi a frazione decimale di un limitato numero di cifre*. Di più, *la frazione decimale risultante, che proceda all' infinito, deve avere un periodo*, siccome si è già avvertito; in fatti nell' eseguire la divisione, i resti delle divisioni parziali non possono esser sempre diversi, perchè ciascuno di essi dovendo esser minore del divisore, il numero dei resti diversi fra loro non può oltrepassare il numero della unità contenute nel divisore stesso meno una, e quindi al più dopo un egual numero di operazioni, rivenendo gli stessi resti e gli stessi dividendi parziali, ritorneranno nel quoziente le stesse cifre e ricomincerà il periodo. Per esempio, riducendo $\frac{1}{7}$ in frazione decimale si ottengono i resti 3,2,6,4,5.1 tutti diversi fra loro, i quali in questo caso sono nel loro massimo numero nè potrebbero essere più di sei, altrimenti vi sarebbe un resto 7 eguale al divisore; laonde dopo le prime sei operazioni ritornano gli stessi resti o gli stessi dividendi parziali, e ricomincia *il periodo composto* di sei cifre cioè *al massimo di tante cifre quante unità sono contenute nel divisore meno una*. Ma il periodo può esser più breve; così riducendo la frazione $\frac{4}{11}$ in decimale, i resti 7, e 4 divengono subito gli stessi, ed il periodo è di due cifre soltanto.

Data una frazione decimale qualunque, trovare la frazione ordinaria corrispondente.

§. 123. Se la frazione decimale non è periodica, non vi bisogna alcun artifizio per trovare la corrispondente frazione ordinaria, e basta eseguire ciò che prescrivesi nel §. 105. Per esempio, la frazione decimale 0,125 corrisponde alla frazione ordinaria $\frac{125}{1000}$, la quale ridotta a minimi termini si cambia in $\frac{1}{8}$. Ma se la frazione decimale è periodica, si farà nel modo seguente.

Osserviamo in prima che le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{9999}$, etc. ridotte in frazioni decimali con la divisione, danno i seguenti sviluppi;

$\frac{1}{9}$ *corrisponde a* 0,111111 etc.
$\frac{1}{99}$ .... 0,010101 etc.
$\frac{1}{999}$ .... 0,001001001 etc.
$\frac{1}{9999}$ .... 0,00010001 etc.

In queste frazioni periodiche il numero delle cifre del periodo va sempre crescendo; nella prima il periodo è composto della sola cifra 1, nella seconda il periodo è 01 etc.

Ciò premesso, sia da ridursi in frazione ordinaria la frazione decimale periodica 0,33333 etc., di cui il periodo è di una sola cifra. Riflettiamo che la frazione periodica 0,111111 etc. moltiplicata per 3 dà per prodotto 0,333333 etc., e perciò la frazione decimale proposta è tripla della frazione 0,111111 etc. Quindi le frazioni ordinarie corrispondenti, dovranno essere anche una tripla dell'altra, cioè la frazione corrispondente a 0,3333.... dovrà esser tripla di $\frac{1}{9}$ che corrisponde a 0,111111 etc. Se dunque moltiplicheremo per 3 la frazione $\frac{1}{9}$ avremo la frazione ordinaria $\frac{3}{9}$, ovvero $\frac{1}{3}$, che sarà la frazione ordinaria corrispondente a 0,3333 etc. Per un altro esempio, debba trovarsi la frazione ordinaria equivalente a 0,454545 etc. Prendiamo la frazione 0,010101 etc. corrispondente ad $\frac{1}{99}$, e moltiplichiamola per 45, ossia pel periodo della frazione proposta, il prodotto sarà, 0,45454545 etc., cioè la stessa frazione proposta. Questa frazione è dunque 45 volte maggiore dell'altra 0,010101 etc., e la medesima relazione dovendo verificarsi tra le frazioni ordinarie corrispondenti, se moltiplicheremo la frazione $\frac{1}{99}$ per 45, il prodotto $\frac{45}{99}$, ovvero $\frac{5}{11}$, sarà la frazione ordinaria corrispondente alla frazione decimale periodica 0,454545 etc.

Allo stesso modo si ridurrà in frazione ordinaria qualunque altra frazione decimale periodica, e solo dovrà avvertirsi di scegliere la frazione 0,001001001 etc. se il periodo della frazione proposta è di tre cifre, l'altra 0,00010001... se il periodo è di quattro cifre etc.

Dunque *per ridurre una frazione decimale periodica in frazione ordinaria, si prende il periodo per numeratore della frazione ordinaria, e se gli dà per denominatore un numero composto di tanti 9 quante sono le cifre del periodo.*

§. 124. Se la frazione decimale contenesse alcune cifre avanti di cominciare il periodo, si farebbe nel modo seguente. Per esempio debba ridursi in frazione ordinaria, 0,23345454545 etc. Osserviamo che vi sono le tre cifre 233 avanti al periodo, che è 45. *Trasportiamo la virgola immediatamente innanzi al periodo*, ed avremo 233,454545 etc., e siccome 0,454545 etc., è eguale a $\frac{45}{99}$, così il valore di 233,454545 etc. sarà 233 $\frac{45}{99}$. Ma questo numero è eguale a mille volte la frazione proposta, perchè corrisponde al decimale 233,454545 etc. che si è ottenuto da quella frazione trasportando in essa la virgola tre luoghi a destra (§. 112); dovrà dunque dividersi $233\frac{45}{99}$ per 1000, per ottenere la frazione ordinaria corrispondente a 0,2334545 etc. Riduciamo $233\frac{45}{99}$ ad una sola frazione, ed avremo $\frac{23112}{99}$, la quale frazione si dividerà per 1000 moltiplicandone il denominatore per questo numero; e la frazione $\frac{23112}{99000}$ sarà in fine il vero valore della frazione decimale proposta 0,2334545 etc.

Il precedente procedimento offre una regola pratica per convertire in frazione ordinaria una qualunque frazione decimale *periodico-mista*. Si è veduto che la frazione

0,2334545...: , trasp ortando la virgola avanti al periodo, equivale a $233\frac{45}{99}$, ovvero a $\frac{233\times99+45}{99}$, indicando soltanto la riduzione ad una sola frazione. Ma $233\times99=233\times100-233$, e quindi $233\times99+45=23300+45-233=23345-233=23112$, dunque *per formare il numeratore della frazione ordinario* $\frac{23112}{99000}$, *equivalente alla proposta frazione decimale mista, si prendono le cifre non periodiche* 233, *si pone alla loro destra il periodo* 45, *e dal numero* 23345 *così composto si tolgono le stesse cifre non periodiche; e per formare il denominatore, si scrivono tanti 9 quante sono le cifre del periodo, e si pongono alla loro destra tanti zeri quante sono le cifre non periodiche.*

Abbreviazione ne' calcoli.

§. 125. L'uso delle frazioni decimali è, in generale, il miglior mezzo per rendere più breve ed uniforme il calcolo numerico. Dovendo per esempio eseguire una *riduzione* implicata di frazioni ordinarie non molto semplici, si convertiranno queste frazioni in decimali e si eseguiranno le operazioni come su i numeri interi. Sia da eseguir si la riduzione.

$$50\tfrac{3}{11}+43\tfrac{53}{167}\times1\tfrac{74}{101}-12\tfrac{15}{153}\times\tfrac{11}{28}+53\tfrac{61}{248}:2\tfrac{17}{126}\,;$$

svolgendo in decimali le frazioni ordinarie (§. 115) essa si cambierà nell'altra,

$$50{,}27+43{,}317\times1{,}7327-12{,}1\times0{,}3929+53{,}24597:2{,}135\,,$$

dalla quale, dopo eseguite le operazioni indicate, si ottiene per risultamento finale 145,52 in cui la cifra de' decimi è esatta. Ma le operazioni su i decimali esigono particolari avvertenze, specialmente allorchè suppliscono a quelle che avrebbero dovuto eseguirsi con le frazioni ordinarie.

Prima di tutto deve stabilirsi *il grado di approssimazione* che si desidera, cioè deve determinarsi la cifra decimale sino alla quale si vuole che sia esatto il risultamento finale. Questo grado di approssimazione dipende dalla grandezza dell'unità che si considera e dalla natura della quistione che ha dato motivo al calcolo. Per esempio, se l'unità fosse il palmo, e si trattasse di valutare un lavoro da muratore, basterebbe l'approssimazione di un decimo, ma bisognerebbe forse spingerla sino ai centesimi trattandosi di lavori di maggior costo, come intagli, dorature e simili. Determinata la cifra decimale sino alla quale si vuole esatto il risultamento finale, è chiaro che deve darsi al risultamento di ciascuna operazione particolare la medesima approssimazione, ed anche maggiore, affinchè gli errori accumulati in molte operazioni non sorpassino il limite assegnato. Per conseguire un tale oggetto *nell'addizione e nella sottrazione de' decimali, d'ordinario, basta dare ai numeri da aggiungersi o da sottrarsi una cifra di più di quelle che si richieggono per l'approssimazione convenuta.*

§. 126. Ma nella moltiplicazione, dopo avere stabilita l'approssimazione che si vuole nel prodotto, quella da darsi ad un fattore dipende dalla grandezza dell'altro fattore. Ed in generale, *nella moltiplicazione l'approssimazione da darsi ai fattori dovrà regolarsi in modo che l'unità stabilita per l'approssimazione del prodotto sia maggiore di ognuno dei fattori moltiplicato per un' unità dell'ultima cifra da ritenersi nell'altro fattore.* Così, volendo il prodotto di 98,0745... per 0,892847... approssimato sino a differire dal vero meno di un centesimo, si dovrà riflettere che

$$0{,}01>98\times0{,}0001,\ \text{e}\ 0{,}01>0{,}89\times0{,}01\,,$$

e però converrà moltiplicare 98,07 per 0,8928 (*).

(*) Indicando con M,m i fattori della moltiplicazione, con p l'unità decimale stabilita per l'approssimazione del prodotto, e con x,y le unità dell'ordine delle ultime cifre da ritenersi nel moltiplicando M e nel moltiplicatore m, la regola esposta qui sopra corrisponde alle due seguenti condizioni:

$$p>mx,\ p>My.$$

§. 127. Rispetto alla divisione, per dare al quoziente un' approssimazione convenuta, bisognerà osservare la seguente regola. *Nella divisione il dividendo potrà lasciarsi indefinito, e l' approssimazione del divisore dovrà regolarsi in modo che esso moltiplicato per se medesimo (ossia per un numero che gli è eguale) e pel doppio dell' unità indicante l' approssimazione del quoziente sia maggiore del dividendo moltiplicato per un' unità dell' ordine dell' ultima cifra da ritenersi nel divisore.* Per esempio, volendo che l'errore del quoziente di 83,24896... per 2,134524... risulti minore di un centesimo, le condizioni precedenti saranno adempite se ritenendo il dividendo qual' è, si spezzerà il divisore ai millesimi; in fatti si ha

$$2,1\times2,1\times0,02>83,2\times0,001 \text{ (*)}.$$

Se nella divisione il divisore è esatto ed il dividendo approssimato, il doppio del divisore moltiplicato per l'unità indicante l'approssimazione del quoziente deve esser maggiore di un' unità dell' ultima cifra da ritenersi nel dividendo. Così dovendo dividere 296,764526... per 12,5625, se il quoziente si vorrà esatto sino ad 0,00001, basterà ritenere nel dividendo quattro cifre decimali soltanto, perchè applicando quest' ultima regola si ha

$$25,1\times0.00001>0,0001 \text{ (**)}.$$

§. 128. L' osservanza di questi precetti servirà ad approssimare il prodotto o il quoziente di due decimali sino a non differire dal vero che per un' unità decimale convenuta, per esempio per $\frac{1}{100}$; ma è chiaro che volendo nel prodotto o nel quoziente esatta la cifra stessa dei centesimi, bisognerà, come si è accennato per l' addizione e la sottrazione, che l'approssimazione si estenda ad una cifra di più, cioè sino ai millesimi; e similmente se si volesse esatta la cifra de' decimi, il prodotto o il quoziente si approssimerebbe sino ai centesimi.

§. 129. Quanto precede suppone che i numeri su i quali deve eseguirsi la moltiplicazione o la divisione siano decimali indefiniti da spezzarsi in modo che si ottenga nel prodotto o nel quoziente l' approssimazione che si desidera; per la qual cosa se que' decimali fossero terminati ed esatti, le regole date non sarebbero ad essi applicabili, e la moltiplicazione o la divisione non esigerebbe alcuna particolare avvertenza. Se però i decimali anzidetti fossero terminati, e si sapessero altronde affetti nell' ultima loro cifra dell' ordinario errore di mezza unità (nel massimo) (§. 121), in questo caso è chiaro che non potrebbe darsi al prodotto o al quoziente un' approssimazione a piacere, e sarebbe utile in vece di conoscere anticipatamente l'approssimazione di siffatti risultamenti dipendente dagli errori su i dati. Per esempio, dovendo moltiplicare 327,35 per 41,925, la regola riguardante la moltiplicazione ci avverte che, per ottenere nel prodotto l' approssimazione di un decimo, bisognerebbe che il moltiplicando fosse esteso sino a' millesimi ed il moltiplicatore sino ai diecimilesimi, per cui quell' approssimazione non può aversi dai due proposti numeri quando si suppongono le ultime loro cifre affette dell' errore ordinario non maggiore di mezza unità; l' approssimazione del prodotto è in vece di una unità della prima cifra degl'interi, come si può verificare con l' anzidetta regola, dimodochè le cifre decimali risultanti dalla moltiplicazione saranno tutte erronee.

(*) Rappresentino D,d il dividendo ed il divisore, ed il dividendo si supponga indefinito, o composto di tante cifre quante bisognano per ottenere il voluto numero di cifre nel quoziente; in questo caso, indicando con q l' unità stabilita per l' approssimazione del quoziente, e con y l' unità dell' ordine dell' ultima cifra da ritenersi nel divisore, la regola tradotta in simboli è la seguente;

$$2d^2q>Dy.$$

(**) Quando il divisore è esatto, e si voglia estendere il dividendo soltanto quanto basta per ottenere la cercata approssimazione nel quoziente, la condizione da osservarsi sarà,

$$2dq>x$$

dove x dinota l' unità dell'ordine dell' ultima cifra da ritenersi nel dividendo.

§. 130. Ma si può assegnare un criterio generale per conoscere direttamente l' approssimazione inerente al prodotto di due decimali dati: *si sopprimerà la virgola nei due fattori, si aggiungeranno indi fra loro come se fossero numeri interi, ed il numero delle cifre di cui sarà composta la metà della somma ottenuta indicherà il numero delle cifre che dovranno risultare erronee nel prodotto; cominciando dalla destra. L' errore sarà perciò sempre minore di una unità dell' ordine della cifra posta immediatamente a sinistra delle cifre erronee.* Così il prodotto dei due decimali 527,095, e 21,97, ne' quali l' ultima cifra si suppone approssimata, non sarà esatto che fra una decina, giacchè la semisomma de' numeri 530000,2200 essendo composta di sei cifre, altrettante cifre dovranno essere erronee a destra del prodotto: e siccome esso non può contenere se non cinque cifre decimali, così sarà erronea anche la cifra delle unità intere. Si rende ciò manifesto col fatto aggiungendo qualche altra cifra decimale ai numeri proposti ed eseguendo di nuovo la moltiplicazione, perchè tutte le cifre decimali del prodotto si vedranno variare, non meno che la cifra delle unità. E si potrebbe anche in altro modo verificare l' approssimazione già calcolata del prodotto: ammettendola cioè come vera, e cercando con la regola data di sopra (§. 126) l'approssimazione de' due fattori, che dovrebbe coincidere con quella dei decimali proposti. Mediante questo procedimento si troverà che, per ottenere nel prodotto l' approssimazione di una decina, il moltiplicatore dev' essere esteso sino a' centesimi, come il numero proposto, ma il moltiplicando potrebbe esser limitato ai decimi, dimodochè l' approssimazione del prodotto dipende dal fattore più piccolo.

§. 131. Rispetto alla divisione, se il dividendo ed il divisore sono limitati, e soggetti all' ordinario errore di non più di mezza unità nell' ultima cifra, il criterio per conoscere l' approssimazione del quoziente sarà questo: *si sopprimerà la virgola nel dividendo e nel divisore, e si otterranno così due numeri interi; si dividerà la semisomma di questi numeri pel divisore moltiplicato per se stesso e pe' denominatori dei due proposti decimali, e ne risulterà una frazione che rappresenterà l'errore massimo che può ricadere sul quoziente* (*). Per esempio dovendo dividere 849,3132 per 3,155, la semisomma de' numeri 8500000,3000 sarà 4200000 circa, che divisa per 3,2×3,2×10000×1000 darà $\frac{4200000}{100000000}=\frac{42}{1000}$; la quale frazione indica che l'errore del quoziente deve sempre risultare minore di mezzo decimo. Viceversa ammettendo quest' approssimazione nel quoziente e volendo conoscere come dovrebbe spezzarsi il divisore per ottenerla, la regola data al §. 127 c' insegna che esso deve estendersi sino ai millesimi, come sta. Osserviamo ancora che nella ipotesi attuale, in cui il dividendo ed il divisore sono limitati e soggetti ad errore nell' ultima cifra a destra, dopo aver determinato l' approssimazione del quoziente, accade spesso che per la regola inversa (§. 127) il divisore può prendersi abbreviato senza che ne soffra il quoziente, ciò che dimostra che in tal caso l' approssimazione del quoziente dipende da quella del dividendo. Per esempio se dovesse dividersi, 2,425 per 40,3163, l' approssimazione del quoziente, secondo la regola data qui sopra sarebbe espressa da $\frac{200000}{16000000000}=\frac{1}{80000}=0{,}000012$, per ottener la quale basterebbe limitare il divisore ai centesimi; infatti il criterio prescritto dalla regola inversa (§. 127) è $1600\times0{,}000024>2{,}4\times0{,}01$.

§. 132. Quanto si è detto sinora della moltiplicazione e della divisione dei decimali è applicabile anche al calcolo de' numeri interi, e spesso le regole divengono più semplici. Così quando il dividendo ed il divisore sono numeri interi terminati, e soggetti ad errore nell' ultima cifra a destra, *l' approssimazione del quoziente si ottiene dividendo la semisomma del dividendo e del divisore pel divisore moltiplicato per se*

(*) Ritenendo le denominazioni usate nelle note precedenti, se indichiamo con R,r i denominatori del dividendo e del divisore, che in generale si suppongono due decimali, l' approssimazione del quoziente sarà espressa da $\frac{\frac{1}{2}(dr+DR)}{rRd^2}$, la quale nel caso che il dividendo e il divisore fossero due numeri interi si riduce ad $\frac{\frac{1}{2}(d+D)}{d^2}$.

stesso; e se il divisore si suppone esatto, ed approssimato il dividendo *l' approssimazione del quoziente sarà espressa dall' unità divisa pel doppio del divisore* (*).

§. 133. Le regole precedenti mentre assicurano al risultamenti della moltiplicazione e della divisione il grado di approssimazione stabilito, rendono spesso più semplici le operazioni, perchè escludono da' numeri proposti le cifre decimali che non sono necessarie per ottenere la richiesta approssimazione. Così se il prodotto de' decimali 0,15643, e 0,04358 si volesse approssimare sino a differir dal vero meno di un millesimo, basterebbe, per ciò che si è detto, moltiplicare 0,16 per 0,044; ed allo stesso modo il quoziente di 54256 per 295674, approssimato sino ad un millesimo si otterrà eseguendo la divisione col divisore molto più semplice 269 (**). Ma la moltiplicazione e la divisione possono anche abbreviarsi notabilmente nel loro andamento quando è stabilito il grado di approssimazione del prodotto o del quoziente.

Sia per esempio da eseguirsi la moltiplicazione dei due decimali 54,317 ed 1,7592 con doversi approssimare il prodotto sino ad un centesimo. È chiaro che l' operazione sarebbe abbreviata se in ciascun prodotto parziale non si tenesse conto che dei centesimi e delle unità superiori: ma siccome i millesimi trascurati potrebbero sommare a più centesimi, così bisognerà porre a calcolo anche i millesimi, tralasciando le rimanenti cifre. Ora, per limitare i prodotti parziali ai soli millesimi, dovrà disporsi la operazione come qui appresso;

```
  54,317
  29,571
  ------
  54 317 millesimi.
  38 022
   2 715
     489
      11
  ------
  95,554
```

dove *si è rovesciato il moltiplicatore* 1,7592, *e la sua cifra* 9 *de' millesimi si è situata sotto la cifra* 4 *della unità del moltiplicando*. In tal guisa il prodotto di ciascuna cifra del moltiplicatore per la superiore corrispondente del moltiplicando dovrà dare *millesimi*, perocchè, mentre le cifre del moltiplicando crescono al solito da destra a sinistra e diminuiscono da sinistra a destra, le sottoposte cifre del moltiplicatore rovesciato seguono un andamento opposto, onde il denominatore del prodotto di ciascuna cifra del moltiplicatore per la superiore corrispondente del moltiplicando rimane costante ed eguale a *mille*, come quello del prodotto della cifra 9 de' millesimi per la superiore cifra 4 delle unità da cui si parte, e dal quale dipendono tutti gli altri. Per esempio la cifra 5 del moltiplicatore esprime centesimi e la superiore corrispondente del moltiplicando esprime decimi, ed è chiaro che i centesimi moltiplicati per i decimi danno *millesimi*.

Dopo aver data ai due fattori la disposizione ora indicata si esegue la moltiplicazione principiando dalla destra ma *nel formare ciascun prodotto parziale s' incomincia dalla cifra del moltiplicando posta nella medesima colonna della cifra*,

---

(*) Le dimostrazioni di tutte le regole precedenti dipendono dal calcolo algebrico, e non possono esser comprese da coloro che cominciano ad imparare l'Aritmetica. Noi le abbiamo date in alcune note alla quarta edizione di quest' opera, ma ora le tralasciamo per brevità, anche perchè non sarà difficile trovarle per chi ha un poco di pratica delle approssimazioni algebriche.

(**) In questo secondo esempio, sostituendo per brevità il numero rotondo 300000 al divisore 295674, la condizione che serve a determinare il luogo dell' ultima cifra de ritenersi nel medesimo è,

$$90000000000 \times 0{,}002 > 54000 \times 1000,$$

dalla quale apparisce che l' ultima cifra da ritenersi nel divisore è quella delle migliaia.

del moltiplicatore che si considera; così il prodotto parziale corrispondente alla cifra 5 del moltiplicatore si comincia dalla cifra 3 del moltiplicando posta nella medesima colonna del 5. A fine però di non trascurare interamente i millesimi provenienti dalle cifre tralasciate, *in ogni prodotto parziale si tien conto delle unità che si riporterebbero se s' incominciasse la moltiplicazione dalla cifra del moltiplicando immediatamente a destra di quella adottata.* Per esempio, il prodotto parziale corrispondente alla cifra 7 del moltiplicatore dovrà cominciare con la moltiplicazione di 7 per 1, che dà 7, ma a questo numero si aggiungeranno 5 unità provenienti dalla moltiplicazione di 7 per 7, che dà 49*diecimilesimi*, i quali, secondo la regola del §. 121, si valutano per 5 *millesimi*. Allo stesso modo il quarto prodotto parziale relativo alla cifra 9 dovrà incominciare con la moltiplicazione di 9 per 4 che fa 36, ma questo numero sarà accresciuto di 3 unità provenienti dalla moltiplicazione di 9 per 3, che dà 27 *diecimillesimi*, in vece de' quali si prendono 3 millesimi. Finalmente i *prodotti parziali si disporranno uno sotto l' altro come nell' addiziona*, perchè ciascuno di essi esprime millesimi, e *la loro somma darà il prodotto totale, in cui la penultima cifra a destra deve considerarsi esente dell' errore derivante dal modo abbreviato di eseguire l' operazione.*

§. 134. Aggiungeremo per maggior chiarezza i seguenti esempii, nel primo dei quali si è calcolato il prodotto de' decimali 565,09494609; 359 9620492 esatto sino ai *centomilesimi*, nel secondo il prodotto de' decimali 4836,6058; 3486,72 esatto sino ai *centesimi*, e nel terzo il prodotto de' numeri interi 459491,69785 esatto sino ai *milioni*: avvertendo che in quest' ultimo si è situata la cifra delle unità del moltiplicatore rovesciato sotto alle centinaia di migliaia del moltiplicando, affinchè tutti i prodotti parziali esprimessero centinaia di migliaia, e che in ciascun esempio si è sempre calcolata, come è di regola, una cifra di più dell' approssimazione richiesta, la quale cifra superante si è notata con un puntino.

565 09494609		4836,605800		459491	
29 40269953		276843		58796	
1695 28483827	*milionesimi*	14509 817400	*millesimi*	275693	*centinaia di migliaia*
282 54747304		1934 642320		41354	
50 85854314		386 928464		3216	
5 08585451		29 019635		367	
33905696		3 385623		23	
1130190		96732		320655	
22604		16863890,174		32065	*milioni*
5085					
113					
203412,734784					

§. 135. Da ciò che si è detto ne' §§. 125, 126....132, si comprende facilmente che, se col metodo abbreviato qui sopra esposto volessero moltiplicarsi fra loro due decimali indefiniti, e fosse determinata l' approssimazione da darsi al prodotto, bisognerebbe prima di tutto spezzare i due fattori secondo la regola data nel §. 126, ed eseguire poi l'operazione compendiata sulle cifre ritenute. Se poi i due decimali saranno terminati, ed affetti nelle loro ultime cifre dell' ordinario errore di mezza unità (nel massimo), prima di eseguire la moltiplicazione, si dovrà, col criterio assegnato nel §. 130, calcolare l'approssimazione inerente al prodotto, a fine di non estendere l' operazione abbreviata alle cifre che di loro natura non potrebbero riuscire esatte.

§. 136. Alla divisione dei decimali si può applicare un' abbreviazione analoga. Ma siccome una divisione qualunque è tanto più complicata quanto più grande è il divisore, così in questa operazione l' abbreviazione consiste in renderlo più semplice; ed è chiaro che si conseguirà l' oggetto se invece di abbassare una dopo l' altra le cifre del dividendo per continuare la divisione si sopprimeranno successivamente *le* ultime cifre a destra del divisore. Dovranno però usarsi alcune avvertenze affinchè un tal procedimento non pregiudichi all' esattezza del quoziente.

Prima di tutto si ridurrà la divisione dei due decimali a quella di un decimale

per un intero (§. 118) ; *stabilita poi l' approssimazione da darsi al quoziente, si calcolerà il numero delle cifre significative che esso deve contenere, avvertendo di contare sempre una cifra di più di quelle che si richieggono per l' approssimazione convenuta. Con questo dato la soppressione successiva delle cifre a destra del divisore si regolerà in modo che per l'ultima divisione parziale non rimangano meno di due cifre nel divisore. Finalmente nel moltiplicare ciascuna cifra del quoziente pel divisore abbreviato, si aggiungeranno al prodotto di quella cifra per la prima cifra a destra del divisore le unità che si riporterebbero dal prodotto precedente se si fosse conservata nel divisore una cifra di più.* Quanto vien prescritto in questa regola non ha bisogno di dimostrazione, per cui ci tratterremo soltanto a mostrarne l' applicazione con alcuni esempii. Sia da dividersi 21785,913925 per 4354,25 e si voglia il quoziente esatto sino ai millesimi. La divisione si ridurrà a quella di 2178591,3925 per 435425, ed affinchè risulti esatta la cifra de' millesimi bisognerà estendere il quoziente sino ai diecimilesimi : perciò esso dovrà contenere cinque cifre e saranno necessarie altrettante divisioni parziali per ottenerle; e siccome il divisore contiene sei cifre si potrà incominciare l' operazione ritenendolo come sta, perchè con la soppressione successiva di una cifra alla sua destra, dopo quattro divisioni parziali, ne rimarranno due per l'ultima divisione, come prescrive la regola. Debba inoltre dividersi 27,9135 per 519,346, e si voglia estendere il quoziente sino ai centomilesimi. Riducendo il divisore a numero intero, la divisione si cangerà in quella di 27913,5 per 519346 e si vede che il quoziente dovrà contenere quattro cifre significative e richiederà quattro divisioni parziali. Si potrà dunque incominciare l'operazione ritenendo sole cinque cifre del divisore, giacchè, con la soppressione di tre cifre dopo tre divisioni parziali, ne rimarranno due per la quarta ed ultima divisione. Finalmente dovendo dividere 97526,369 per 428,23, ovvero 9752736,9 per 42823, se si vorrà esteso il quoziente sino ai millesimi, esso dovrà contenere sei cifre. per cui non si potranno incominciare a sopprimere le cifre del divisore se non dopo aver trovate tre cifre del quoziente. *In generale s' incominceranno a sopprimere le cifre a destra del divisore quando rimarranno a trovarsi nel quoziente tante cifre quante ne contiene il divisore meno due.* Riportiamo qui appresso il calcolo degli accennati tre esempii nel quale non abbiamo tralasciato di registrare le sottrazioni per mostrare come si formano i prodotti delle cifre del quoziente pel divisore abbreviato.

```
2178591,3925 | 435425    | 27913,5 | 51934 6 | 9752736,9 | 42823
2177125      | 5,0033    | 25967 3 | 0,05374 | 85646     | 227,743
   1460      |           |  1946 2 |         | 118813
   1306      |           |  1558 0 |         |  85646
    160      |           |   388 2 |         |  331676
    130      |           |   363 5 |         |  299761
     30      |           |    24 7 |         |   31915
             |           |    20 8 |         |   29976
             |           |     3 9 |         |    1939
             |           |         |         |    1713
             |           |         |         |     226
             |           |         |         |     214
             |           |         |         |      12
```

§. 137. Per la divisione, come per la moltiplicazione , se i decimali sui quali deve effettuarsi l'operazione abbreviata saranno indefiniti, e sia determinata l'approssimazione da darsi al quoziente, converrà prima di tutto spezzare il divisore o il dividendo in conformità della regola data nel §. 127, ed indi eseguire la divisione compendiata sulle cifre ritenute. Ma se il dividendo ed il divisore fossero terminati , ed affetti dall' errore ordinario non maggiore di mezza unità nell' ultima cifra, in tal caso, prima di eseguire la divisione si dovrà , col criterio assegnato nel §. 131 calcolare l' approssimazione di cui è suscettivo il quoziente, e con questo dato intraprendere l' operazione compendiata.

§. 138. Abbiamo detto (§. 125) che in generale l' uso dei decimali rende più breve ed ordinato il calcolo numerico, ma qualche volta accade in vece che alcune frazioni ordinarie semplicissime possono con vantaggio sostituirsi alle frazioni decimali corrispondenti. La divisione dell' unità in 2, 4 ed 8 parti dà origine a molte di queste abbreviazioni. Si sa che le frazioni decimali 0,5; 0,25; 0,125 equivalgono ad $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$: quindi la moltiplicazione di un numero qualunque per 0,5; 0,25; 0,125, equivale alla moltiplicazione per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ che si cambia nella divisione per 2 per 4, o per 8; e viceversa la divisione per 0,5; 0,25; 0,125 si cambia nella moltiplicazione per 2, 4 ed 8. E siccome la moltiplicazione o la divisione di un numero per l' unità seguita da zeri non importa che il trasporto della virgola verso destra o verso sinistra, così le operazioni di moltiplicare o dividere un numero qualunque per 5, 25, 125 saranno anche rese più facili mutandole nelle altre di dividere o moltiplicare lo stesso numero per 2, 4, 8, e moltiplicarlo o dividerlo contemporaneamente per 10, 100, 1000. Ciò posto, indicando con N un qualsivoglia numero, si comprenderanno facilmente le relazioni che seguono;

$$N \times 5 = \frac{N \times 10}{2}, \qquad N : 5 = \frac{N \times 2}{10}$$

$$N \times 25 = \frac{N \times 100}{4}, \qquad N : 25 = \frac{N \times 4}{100}$$

$$N \times 125 = \frac{N \times 1000}{8}, \qquad N : 125 = \frac{N \times 8}{1000}$$

$$N \times 75 = N \times 100 \times \tfrac{3}{4}, \qquad N : 75 = \frac{N}{100} \times \tfrac{4}{3}$$

$$N \times 625 = \frac{N}{2} \times \tfrac{10000}{8} \qquad N : 625 = \frac{N \times 16}{10000};$$

dalle quali si cavano anche le altre,

$$N \times 2\tfrac{1}{2} = \frac{N \times 10}{4}, \qquad N : 2\tfrac{1}{2} = \frac{N \times 4}{10}$$

$$N \times 12\tfrac{1}{2} = \frac{N \times 100}{8}, \qquad N : 12\tfrac{1}{2} = \frac{N \times 8}{100}$$

$$N \times 7\tfrac{1}{2} = N \times 10 \times \tfrac{3}{4}, \qquad N : 7\tfrac{1}{2} = \frac{N}{10} \times \tfrac{4}{3}$$

$$N \times 62\tfrac{1}{2} = \frac{N}{2} \times \tfrac{1000}{8}, \qquad N : 62\tfrac{1}{2} = \frac{N \times 16}{1000}$$

$$N \times 6\tfrac{1}{4} = \frac{N}{2} \times \tfrac{100}{8}, \qquad N : 6\tfrac{1}{4} = \frac{N \times 16}{100}$$

Sarà facile applicare queste regole secondo le occasioni. Per esempio, il prodotto di 31246 per 33125 si ridurrà a quello di 31246000 per $33\frac{1}{8}$, moltiplicando il primo e dividendo il secondo fattore per 1000, come è permesso (§. 96); il quoziente di 425475 per 125 si otterrà moltiplicando $4254\frac{3}{4}$ per 8, e dividendo il prodotto per 10, e simili.

§. 139. Le frazioni decimali periodiche nascenti dalla divisione per 3, 6, 7 etc. è chiaro che saranno anche supplite con vantaggio dalle frazioni ordinarie corrispon-

denti. Così se dovesse moltiplicarsi 401.666..... per 54,133..... sarebbe molto più facile eseguire l'operazione su i numeri $40\frac{1}{6}$, $541\frac{1}{3}$, che si ottengono dividendo il primo e moltiplicando il secondo per 10 (§. 96), e mutando le frazioni decimali in ordinarie. Parimente alla divisione di 35,63777.....per 5,4222 si sostituirà con vantaggio quella di $35,63\frac{7}{9}$ per $5,4\frac{2}{9}$, che, moltiplicando per 9 ed omettendo il comune denominatore, si muta nell'altra di 320,74 per 48,8. Il cambiamento delle frazioni decimali periodiche in frazioni ordinarie è quasi sempre necessario per la brevità de' calcoli, poichè quelle frazioni decimali progredendo all'infinito, le regole date di sopra per assicurare ai risultamenti delle operazioni l'approssimazione che si domanda condurrebbero spesso all'uso di un gran numero di cifre decimali.

§. 140. Qualche volta la moltiplicazione o la divisione di un numero N per un intero unito a frazione si può cambiare in una operazione più semplice; ecco alcune relazioni di questo genere,

$$N\times 3\tfrac{1}{3}=\frac{N\times 10}{3}, \qquad N:3\tfrac{1}{3}=\frac{N\times 3}{10}$$

$$N\times 33\tfrac{1}{3}=\frac{N\times 100}{3}, \qquad N:33\tfrac{1}{3}=\frac{N\times 3}{100}$$

$$N\times 16\tfrac{2}{3}=\frac{N\times 100}{6}, \qquad N:16\tfrac{2}{3}=\frac{N\times 6}{100}$$

$$N\times 13\tfrac{1}{3}=N\times 10\times\tfrac{4}{3}, \qquad N:13\tfrac{1}{3}=\frac{N}{10}\times\tfrac{3}{4}$$

$$N\times 11\tfrac{2}{3}=N\times 10\tfrac{7}{6}, \qquad N:11\tfrac{2}{3}=\frac{N}{10}\times\tfrac{6}{7}$$

$$N\times 8\tfrac{4}{7}=N\times 10\times\tfrac{6}{7}, \qquad N:8\tfrac{4}{7}=\frac{N}{10}\times\tfrac{7}{6}$$

È da notarsi che le moltiplicazioni per $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{6}$ che s'incontrano nelle precedenti espressioni possono eseguirsi con molta facilità. La moltiplicazione di un numero per $\frac{3}{4}$ si esegue togliendo da quel numero la sua quarta parte, e la moltiplicazione per $\frac{4}{3}$ si riduce ad aggiungere al numero stesso la sua terza parte; similmente il prodotto per $\frac{6}{7}$, o per $\frac{7}{6}$ si ottiene togliendo dal dato numero la sua settima parte, o aggiungendogli la sua sesta parte.

§. 141. La moltiplicazione per 0,9, o per 0,99; 0,999 etc. si riduce anche immediatamente ad una sottrazione, e questa abbreviazione è molto utile in alcuni casi; si moltiplica per 0,9 togliendo dal dato numero la sua decima parte che si ottiene trasportando la virgola di un luogo a destra, ed allo stesso modo il prodotto di un numero per 0,99; 0,999 si forma togliendone la centesima o la millesima parte. Similmente si moltiplicherà un numero per 9,99,999 etc. aggiungendo ad esso uno, due, o tre zeri e sottraendo dal numero risultante il numero proposto; e quindi facilmente si comprenderanno le seguenti relazioni, nelle quali viene indicato il modo di abbreviare le moltiplicazioni per 18, 198, 1998 etc. 27, 297, 2997 etc.; 36, 396, 3996 etc.

$$N\times 9=N\times 10-N, \qquad N\times 99=N\times 100-N,$$
$$N\times 18=N\times 2\times 10-N\times 2, \qquad N\times 198=N\times 2\times 100-N\times 2,$$
$$N\times 27=N\times 3\times 10-N\times 3, \qquad N\times 297=N\times 3\times 100-N\times 3,$$
$$N\times 36=N\times 4\times 10-N\times 4, \qquad N\times 396=N\times 4\times 100-N\times 4.$$

Finalmente i principii generali enunciati nel §. 96 potranno servire in molti altri casi ad abbreviare la moltiplicazione e la divisione, specialmente se si avrà riguardo anche a ciò che si è detto qui sopra. Così la moltiplicazione di 241632 per 17625, moltiplicando più volte di seguito il primo fattore e dividendo il secondo per 5, si riduce a quella più semplice di 6040800 per 705, ovvero di 60408000 per $70\frac{1}{2}$; e la divisione di 582754 per 1875, moltiplicando successivamente il dividendo ed il divisore per 2, si cambia in quella di 2331016 per 7500, ovvero di 233,1016 per $\frac{3}{4}$, che si esegue aggiungendo al numero 233,1016 la sua terza parte.

CAPO V.

FORMAZIONE DEL QUADRATO E DEL CUBO, ED ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA E DELLA RADICE CUBICA DE' NUMERI.

Del quadrato e del cubo, della radica quadrata e della radice cubica.

§. 142. Si chiama *quadrato* di un numero il prodotto di quel numero per se stesso ossia per un numero che gli è uguale; e dicesi *cubo* di un numero il prodotto di quel numero moltiplicato successivamente per sè stesso due volte, ovvero il prodotto di tre fattori eguali al numero proposto. Segue da ciò che il cubo di un numero è pure il prodotto del numero stesso pel suo quadrato. Per esempio, 4 è il *quadrato* di 2, perchè $2\times2=4$; ed 8 è il *cubo* di 2, perchè $2\times2\times2=8$; o, ciò che vale lo stesso, perchè $2\times4=8$. La formazione del quadrato e del cubo del numeri si riduce dunque ad una moltiplicazione, la quale non differisce dall' ordinaria se non in ciò, che i numeri da moltiplicarsi sono eguali fra loro.

I quadrati ed i cubi de' numeri di una sola cifra sono i seguenti:

Numeri.....	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Quadrati..	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64.	81
Cubi.......	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729

§. 143. Avendo ben compreso il modo di formare *il quadrato* ed il cubo, sarà facile concepire il significato di *radica quadrata* e di *radice cubica*. Per *radice quadrata* di un dato numero s' intende un tale altro numero che moltiplicato per sè stesso, ovvero, come suol dirsi, *innalzato a quadrato*, dà per risultamento il numero proposto. Similmente la *radice cubica* di un numero dato è un numero tale che moltiplicato due volte per sè stesso, o *innalzato a cubo*, produce il numero proposto. Nel quadro precedente i numeri semplici contenuti nella prima linea sono radici quadrate dei corrispondenti numeri della seconda linea, e radici cubiche de i numeri posti nella terza linea. Così 6 è radice quadrata di 36, e nello stesso tempo radice cubica di 216; perchè 36 nasce da 6 moltiplicato per 6, e 216 risulta da 6 moltiplicato per 6, ed una seconda volta per 6. Si osservi che il quadrato ed il cubo dell' unità, come pure le sue radici quadrata e cubica sono invariabili ed eguali sempre alla stessa unità.

§. 144. Il quadrato ed il cubo di una frazione si formano come quelli de' numeri interi, moltiplicando la frazione proposta una o due volte per sè stessa. Per esempio, il quadrato di $\frac{3}{4}$ è, $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$, ed il cubo di $\frac{3}{4}$ è, $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$. Viceversa la frazione $\frac{3}{4}$ è radice quadrata di $\frac{9}{16}$, e radice cubica di $\frac{27}{64}$.

§. 145. È notabile *che il quadrato o il cubo di una frazione è necessariamente una altra frazione, e non potrebbe mai essere un numero intero*. In fatti si supponga la proposta frazione ridotta alla sua più semplice espressione, come è sempre permesso, e sia $\frac{12}{35}$: sciogliendo i suoi termini ne' loro fattori semplici, essa prenderà l'aspetto di $\frac{3.2.2.}{5.7}$ (§ 72), ed il suo quadrato sarà rappresentato da $\frac{12}{35}\times\frac{12}{35}=\frac{3.2.2.}{5.7}\times\frac{3.2.2.}{5.7}=\frac{3.2.2.3.2.2}{5.7.5.7}=\frac{144}{1225}$; nè i termini della frazione data o quelli del suo quadrato potranno essere espressi per mezzo de' loro divisori semplici in modo diverso dal qui indicato (§. 73). Or essendo la frazione proposta ridotta ai suoi minimi termini, non potrà aver fattori comuni al numeratore ed al denominatore, e siccome il numeratore ed il denominatore della frazione quadrata non contengono rispettivamente se non gli stessi fattori del numeratore e denominatore della frazione data replicati, così nemmeno la frazione quadrata conterrà fattori comuni al numeratore ed al denominatore, onde dovrà ancor essa considerarsi ridotta alla sua più semplice espressione. Dunque il quadrato di una frazione irriducibile è pure una frazione irriducibile, e però essenzialmente diversa da un numero intero. Con lo stesso ragionamento si dimostrerà che il cubo di una frazione irriducibile è parimente una frazione irreducibile, ed è chiaro che ciò che si è detto per le frazioni vere vale egualmente per le frazioni spurie.

Riflettiamo inoltre che di tutti i numeri compresi fra 1 ed 81 *nove* soltanto sono quadrati di numeri interi, siccome apparisce dal quadro riportato di sopra; e gli altri numeri intermedi devono aver per radice un intero unito ad una frazione. Così il numero 7 è maggiore del quadrato di 2 e minore del quadrato di 3, per cui il numero che moltiplicato per se stesso darebbe per prodotto il 7 dev' essere maggiore di 2 e minore di 3, cioè dev' essere eguale a 2 più una frazione. Ma questa frazione è di natura affatto diversa da quelle considerate sinora ne' calcoli aritmetici, poichè qualunque frazione, ordinaria, decimale o decimale periodica, potrebbe sempre mettersi sotto la forma di una frazione ordinaria irriducibile, la quale aggiunta all' intero 2 darebbe per somma anche una frazione irriducibile (§. 71), e si è veduto pocanzi che il quadrato di una tal frazione non potrebbe esser mai un numero intero, come il 7. *Dunque la radice quadrata di ogni numero intero il quale non risulti dalla moltiplicazione di un altro numero intero per sè stesso, è una quantità di nuovo genere diversa dagli interi e dalle frazioni, e prende il nome di quantità* o *numero* IRRAZIONALE; per formarsene una idea potrebbe considerarsi come un decimale che non finisce mai, e di cui il periodo ha un numero infinito di cifre.

Allo stesso modo tutti i numeri interi compresi fra 1 ed 8, fra 8 e 27, fra 27 e 64 etc. non hanno per radice cubica nè un intero, nè un intero unito a frazione, ma la radice cubica di tali numeri è ancor essa *irrazionale*. L' *irrazionalità* delle radici quadrate è però di diversa natura della irrazionalità delle radici cubiche, come altrove si dimostra.

§. 146. Per brevità di scrittura, invece d' indicare il quadrato di un numero N con $N \times N$ si dinota con N^2, ed anche l'indicazione del cubo si abbrevia scrivendo N^3 invece di $N \times N \times N$. Il segno $\sqrt{}$ posto avanti ad un numero serve per indicare la radice quadrata, ed $\sqrt[3]{}$ la radice cubica. Le seguenti uguaglianze faranno meglio comprendere l' uso delle convenzioni accennate.

$$3^2 = 3 \times 3 = 9,\ 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64;\ \sqrt{9} = 3,\ \sqrt[3]{64} = 4$$

Estrazione della radice quadrata dai numeri.

§. 147. L' operazione che ha per oggetto la ricerca della radice quadrata o cubica di un dato numero si chiama *estrazione di radice*; *estrarre* la radice quadrata da un numero dato significa dunque trovare quella radice. L' estrazione della radice quadrata dipende dalla formazione del quadrato della somma di due numeri; ma perchè occorre qualche volta di trovare anche il quadrato di una differenza, sarà utile premettere i seguenti principii.

§. 148. Abbiamo già veduto come più operazioni successive possono indicarsi per mezzo dei segni improntati dall' Algebra (§. 51), e relativamente all' addizione ed alla sottrazione, finchè i numeri da sommarsi o da sottrarsi si considerano isolatamente, il segno + servirà ad indicare l' addizione, ed il segno — la sottrazione. Dovendo per esempio aggiungere il numero 7 al 5, e togliere dalla loro somma il 9, ed a ciò che rimane aggiungere il 10, è chiaro che queste operazioni successive saranno con esattezza indicate nell' espressione $5+7-9+10$. È evidente altresì che *in una riduzione qualunque*, $5+7-9+10-11+27$, *si possono senza inconveniente eseguire prima tutte le addizioni e poi le sottrazioni;* perocchè le quantità da aggiungersi al primo numero 5 saranno sempre 7, 10, 27, e le quantità da sottrarsi saranno 9, 11; onde, o prima o dopo che si aggiungano le une, o si sottraggono le altre, il risultamento finale delle operazioni non potrà in alcun modo variare. Quindi la suddetta riduzione potrà scriversi anche così,

$$5+7+10+27-9-11.$$

Ma quando l' addizione o la sottrazione devono eseguirsi fra espressioni composte di due o più numeri uniti fra loro con diversi segni, allora per indicare convenientemente il complesso di quelle moltiplici operazioni sono necessarie alcune particolari avvertenze. E siccome ciò che diremo in proposito può applicarsi ai numeri non meno che ad ogni altra specie di quantità, così per dinotare quelle grandezze più generalmente ci serviremo delle lettere dell' alfabeto (*).

(*) Per coloro i quali volessero studiare la Geometria prima dell' Algebra abbiamo creduto utile l' esposizione anticipata de' seguenti semplicissimi principii.

§. 149. 1.° *Se alla quantità b voglia aggiungersi la differenza $a-c$, si dovrà scrivere $b+a-c$*; perchè aggiungere $a-c$ a b è lo stesso che aggiungere b ad $a-c$, e questa addizione s'indica scrivendo $a-c+b$, la quale espressione, per ciò che si è osservato quì sopra, equivale a $b+a-c$, dove l'addizione è indicata prima della sottrazione.

2.° *Se dalla quantità b si dovrà togliere $a-c$, bisognerà scrivere $b-a+c$.* In fatti è chiaro che *la differenza di due quantità non varia se a ciascuna di esse si aggiunge una medesima quantità*; aggiungasi c a ciascuna delle proposte quantità, ed esse diverranno $b+c$, ed $a-c+c$, ossia a, perchè la quantità c aggiunta e sottratta si annulla. Dunque in vece di togliere $a-c$ da b, torna lo stesso togliere a da $b+c$, e si avrà $b+c-a$, che è la medesima cosa di $b-a+c$; e però *per eseguire la sottrazione bisogna cambiare i segni alle quantità da sottrarsi.*

§. 150. 3.° Rispetto alla moltiplicazione, si è già veduto (§. 68) che il prodotto della somma di due numeri per la somma di due altri è composto di quattro prodotti, ed applicando ciò che è detto in quel luogo al caso in cui le due somme sono eguali, si otterrà la forma del prodotto di $a+b$ per $a+b$; cioè il quadrato di $a+b$ sarà così composto,

$$a\times a+b\times a+a\times b+b\times b:$$

la quale espressione, riflettendo che $b\times a$ è lo stesso di $a\times b$ (§. 29) si può scrivere in quest'altro modo

$$a^2+a\times b+a\times b+b^2;$$

ed indicando per brevità con $2a\times b$ il prodotto $a\times b$ ripetuto, e con $(a+b)^2$ il quadrato di $a+b$, si avrà finalmente,

$$(a+b)^2=a^2+2a\times b+b^2.$$

Dunque il quadrato della somma di due quantità è composto del quadrato della prima, più il doppio del prodotto della prima per la seconda, più il prodotto della seconda. Così, considerando il numero 12 composto de' due numeri 3 e 9, il suo quadrato sarà composto

del quadrato di 3, *ovvero*	9
di due volte 3×9, *ovvero*	54
del quadrato di 9, *ovvero*	81
Totale......	144

4.° *Il prodotto di c per $a-b$ è espresso da $c\times a-c\times b$.* Imperciocchè, se rappresenteremo la differenza $a-b$ con d, avremo evidentemente $a=b+d$, e quindi il prodotto di c per a sarà la stessa cosa del prodotto di c per $b+d$: ma dal §. 68 si desume che il prodotto di c per $b+d$ è composto de' due prodotti $c\times b$, $c\times d$; dunque sarà $c\times a=c\times b+c\times d$. E poichè *togliendo da due quantità eguali la stessa quantità i resti sono eguali*, se toglieremo dall'una e dall'altra parte il prodotto $c\times b$ avremo $c\times a-c\times b=c\times d$, la quale eguaglianza esprime la proposizione enunciata, perchè $d=a-b$.

5.° Sia da moltiplicarsi la differenza $a-b$ per la somma $a+b$. Il prodotto di a per $a-b$ sarà, pel numero precedente, $a\times a-a\times b$ ovvero $a^2-a\times b$, ed il prodotto di b per $a-b$ sarà $a\times b-b^2$; ma la differenza $a-b$ deve ripetersi prima a volte e poi b volte nel prodotto totale di $a-b$ per $a+b$, dunque esso sarà, $a^2-a\times b+a\times b-b^2$, ossia a^2-b^2. *Quindi il prodotto della somma di due quantità per la loro differenza eguaglia la differenza de' loro quadrati.* Se $a=b+1$, la differenza $a-b$ è eguale ad 1, ed il prodotto di $a-b$ per $a+b$ risulta eguale ad $a+b$, perchè qualunque grandezza moltiplicata per l'unità rimane la stessa (§. 47); dunque in tal caso la differenza dei quadrati de' due numeri a, b è uguale alla somma delle radici. Da questa proprietà deriva che nella serie de' quadrati de' numeri naturali (§. 142) la differenza di due quadrati prossimi eguaglia la somma dei numeri corrispondenti posti nella prima linea.

6.° Finalmente per moltiplicare $a-b$ per $a-b$ si ponga $a-b=d$, ed il prodotto di d per $a-b$ sarà espresso da $d\times a-d\times b$: ma il prodotto di d per a ossia di $a-b$

per a è eguale ad $a^2-a\times b$, e quello di d per b è eguale ad $a\times b-b^2$, dunque dal prodotto $a^2-a\times b$ dovrà togliersi l'altro $a\times b-b^2$, e questa sottrazione pel numero 2., darà

$$a^2-a\times b-a\times b+b^2,$$

o più brevemente, $a^2-2a\times b+b^2$; cioè, *il quadrato della differenza di due quantità eguaglia il quadrato della prima, più il quadrato della seconda, meno il doppio del prodotto della prima per la seconda.*

§. 151. Ciò premesso passiamo ad esporre il metodo di estrarre la radice quadrata da un numero qualunque. Riflettiamo primamente che il quadrato di un numero di una sola cifra non può contenerne più di due, siccome apparisce dal quadro del §. 142; il quadrato di un numero di due cifre non può contenerne più di quattro, perchè 10000 che è il più piccolo numero di cinque cifre è quadrato di 100 che ne contiene tre; il quadrato di un numero di tre cifre non può contenerne più di sei, perchè 1000000 che è il più piccolo numero di sette cifre è quadrato di 1000 che ne contiene quattro, e così di seguito. Per conseguenza dovendo estrarre la radice quadrata da un numero qualunque, si potrà a primo aspetto conoscere di quante cifre essa deve esser composta, poichè se il numero dato avrà una o due cifre, la sua radice ne avrà una, se avrà tre o quattro cifre la radice ne avrà due, se avrà cinque o sei cifre la radice ne avrà tre etc.

Esaminiamo ora la composizione del quadrato di un numero di due cifre, applicando i principii esposti di sopra intorno alla formazione del quadrato di una somma. Consideriamo, per esempio, il numero 47 decomposto in due parti, cioè in 4 decine e 7 unità: la somma $40+7$ potrà paragonarsi ad $a+b$, e si potrà supporre $a=40$, $b=7$, onde si avrà,

$$\begin{aligned} a^2 &= 40^2 \ldots\ldots = 16\cdot 0\ 0 \\ 2\times a\times b &= 2\times 40\times 7 = 80\times 7 \ldots\ldots = 5\ 6\cdot 0 \\ b^2 &= 7^2 \ldots\ldots = 4\cdot 9 \\ \textit{Totale}\ (a+b)^2 &= 47^2 \ldots\ldots = 22\ 0\ 9 \end{aligned}$$

il quadrato di 47 si compone dunque di tre parti, cioè *del quadrato delle decine, del doppio del prodotto delle decine per le unità (che pel §. 96 è la stessa cosa del doppio delle decine moltiplicato per le unità) e del quadrato delle unità*: il quadrato 1600 delle decine non contiene cifre significative di un ordine inferiore alle centinaia, nè potrebbe mai contenerne, perchè la moltiplicazione di decine per decine dà necessariamente centinaia; ed il doppio del prodotto delle decine per le unità non contiene cifre significative di un ordine inferiore alle decine, perchè la moltiplicazione di decine per unità produce decine (*). Queste osservazioni bastano per farci distinguere nel quadrato totale 2209 le varie parti di cui è composto, cioè bastano a guidarci nella estrazione della sua radice. Imperciocchè si separino due cifre a destra del dato numero 2209, e si disponga l'operazione come qui appresso, situando il numero proposto e la sua radice come il dividendo e il divisore di una divisione, ed eseguendo le moltiplicazioni e le sottrazioni che verranno indicate.

22 09	47 *radice*
16	
60· 9	8; 87
60· 9	
00 0	

Per ciò che si è detto, la radice di 2209 deve esser composta di due cifre; cioè decine ed unità, ed il quadrato delle decine, non potendo contenere che centinaia, deve trovarsi fra le 22 centinaia separate a sinistra. Ma il numero 22 delle centinaia, oltre

(*) È noto che in una moltiplicazione se ciascuno dei fattori termina con uno zero il prodotto termina con due zeri, e se un solo de' fattori termina con zero il prodotto anche termina con zero.

al quadrato delle decine, conterrà ancora le centinaia provenienti dal doppio del prodotto delle decine per le unità, per cui spesso, come nel nostro caso, il numero delle centinaia non è un *quadrato perfetto*, e per trovare la cifra delle decine della radice si dovrà cercare il maggior quadrato contenuto in 22. E poichè 22 è compreso fra 16 e 25, il maggior quadrato in esso contenuto sarà 16, di cui la radice 4 sarà la cifra delle decine che si cercava. Registrata questa prima cifra nel luogo assegnato alla radice del numero proposto, si toglierà il suo quadrato 16 da 22, ed abbassate a fianco del resto 6 le ultime due cifre 09, il numero 609 che ne risulta dovrà comprendere il doppio del prodotto delle decine per le unità ed il quadrato delle unità; ma il doppio prodotto, non potendo contenere che decine, dovrà trovarsi nelle 60 decine separate a sinistra con un puntino, le quali comprenderanno anche le decine provenienti dal quadrato delle unità. Per trovare la cifra delle unità si dividerà il numero 60 pel doppio delle decine della radice già trovate, cioè per 8, ed il quoziente 7 esprimerà le unità della radice; perocchè dalla composizione del quadrato esposta di sopra si vede che il doppio prodotto 560 diviso per uno dei suoi fattori 80 deve dare l' altro fattore 7, ed allo stesso modo le 56 decine (contenute fra le 60 del numero 609) divise per le 8 decine esprimenti il doppio della prima cifra della radice devono dare la seconda cifra 7: il resto 4 della divisione di 60 per 8 esprimerà le decine provenienti dal quadrato delle unità. Ottenuta così la cifra 7 delle unità, se ne prenderà il quadrato 49, il quale si aggiungerà al prodotto del doppio delle decine per le unità cioè al prodotto di 80 per 7, e la somma risultante dovrà eguagliare il numero 609 che comprende appunto quelle due ultime parti del quadrato di 47; ciò si verifica nel fatto ed il resto *zero* dell'ultima sottrazione conferma l' esattezza di tutta l'operazione. Ma per formare simultaneamente le due ultime parti del quadrato, si potrà scrivere la seconda cifra 7 della radice, a fianco del divisore 8, che esprime decine, e moltiplicare tutto il numero 87 per la stessa cifra 7; in fatti il prodotto di 7 per 80+7 è composto di due prodotti, 80×7, e 7×7, (§. 68) cioè del prodotto del doppio delle decine per le unità e del quadrato delle unità.

§. 152. Sia, per un altro esempio, da estrarsi la radice quadrata dal numero 324. L' operazione procederà come segue;

3·24	18 *radice*
1	
22·4	2·8
22·4	
00 0	

dove è da notare soltanto che il doppio prodotto delle decine della radice per le unità vien accresciuto in modo dall' aggiunta delle decine provenienti dal quadrato delle unità, che il totale 22 diviso per 2, doppio della prima cifra della radice, darebbe 11 in vece di 8, quale si vede registrato. Ma le unità della radice non possono in nessun caso essere più di 9; e qui neppure una tal cifra deve ammettersi, poichè il doppio del prodotto di 10 per 9 insieme col quadrato di 9 (che si formano moltiplirando 29 per 9) darebbero 261, numero maggiore di 224 da cui deve togliersi. La cifra 9 risulta dunque esorbitante, per cui si passa ad esperimentare la cifra 8 che si trova soddisfacente, perchè il prodotto di 28 per 8 è appunto 224. Questo esempio ci avverte che la divisione eseguita per ottenere la seconda cifra della radice la dà spesso eccedente, e per ridurla al giusto bisogna alcune volte istituire varii esperimenti, con diminuire gradatamente di un' unità il quoziente della divisione. A rendere più facili questi tentativi potrà servire la proprietà avvertita nel numero 5.° del §. 150 che, quando due numeri differiscono di una unità, la loro somma uguaglia la differenza de' loro quadrati; così il quadrato di 19 è maggiore del quadrato di 18 per 19+18=37, e quindi, nel precedente esempio, dopo aver formato con la cifra 9 il numero 261 che comprende il doppio prodotto ed il quadrato di 9, per formare con la cifra 8 il numero analogo basterà togliere da 261 la somma delle radici, 37.

§. 153. L' estrazione della radice quadrata da un numero di molte cifre si riduce a ripetere più volte le operazioni qui sopra descritte. Propongasi il numero 223729; la

sua radice 473, che per maggior chiarezza supporremo conosciuta, contiene tre cifre, ma potra ancha considerarsi composta di decine ed unità, e quindi facendo $a=47$ *decine*, $b=3$ *unità*, il numero 223729 sarà composto come segue;

$$\begin{array}{rl} a^2 = 47{\cdot}0^2 = 22{\cdot}09{\cdot}00 = & 16{\cdot}00{\cdot}0\,0 \\ & 6\,09{\cdot}0\,0 \\ 2a+b = 94{\cdot}0 \times 3 \ldots\ldots\ldots = & 28\,2{\cdot}0 \\ b^2 = 3^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = & 9 \\ \hline (a+b)^2 = 473^2 \ldots\ldots\ldots\ldots = & 22\ 37\ 2\,9 \end{array}$$

Ciò posto l' estrazione della radice quadrata si eseguirà come quì appresso;

22 37·29	473
16	
63·7	8·7
60 9	
2 82 9	94 3
2 82 9	
0 00 0	

si separeranno due cifre a destra del numero proposto, le quali non possono appartenere al quadrato delle decine, e questo quadrato dovrà esser contenuto nelle rimanenti quattro cifre 2237; ma la radice di un numero di quattro cifre dovendo averne due, per estrarre la radice da 2237 si procederà nel modo usato di sopra separando cioè due cifre alla sua destra e cercando il maggior quadrato contenuto nelle rimanenti cifre 22, che è 16, ecc. Dopo aver così trovate le due cifre 47, ovvero le decine della radice, si abbasserà a fianco del resto 28 della seconda sottrazione l' ultima coppia 29, ed il numero 2829 dovrà comprendere il doppio del prodotto delle decine per le unità ed il quadrato delle unità della radice. Quindi per trovare queste unità si separerà al solito la cifra 9, che non può appartenere al doppio prodotto, e si dividerà il numero 282 per 94 doppio delle decine; il quoziente 3 esprimerà l' ultima cifra della radice, e per formare simultaneamente il prodotto del doppio delle decine per le unità ed il quadrato delle unità si moltiplicherà 943 per 3, come si è praticato per la cifra precedente.

Se il numero proposto fosse 22371824, si supporrebbe sempre la sua radice composta di decine ed unità; e separando le prime due cifre a destra, 24, si troverebbe il numero delle decine, composto di tre cifre, estraendo la radice quadrata da 223718 nel modo tenuto quì sopra, ed in fine si troverebbero le unità della radice.

Così l' estrazione della radice da un numero di molte cifre sarà ridotta progressivamente a quella di un numero più semplice: e si potrà sin da principio dividere il numero proposto in coppie cominciando dalla destra, estrarre la radice quadrata dalla prima coppia o dalla prima cifra a sinistra, abbassare a fianco del resto la seconda coppia, e continuare l'operazione, formando i divisori con raddoppiare sempre la parte della radice già trovata, ed eseguendo le divisioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni successive di sopra indicate. Accade qualche volta che, dopo aver abbassata una coppia, non può effettuarsi la solita divisione, per essere il dividendo troppo piccolo; si scrive allora uno zero fra le cifre della radice, si abbassa un' altra coppia e si esegue la divisione pel doppio delle cifre della radice compreso lo zero.

Se dopo aver abbassata l' ultima coppia ed eseguita l' ultima sottrazione si ottiene un resto, ciò dimostra che il numero proposto non è un *quadrato perfetto*, e la radice trovata è quella del maggior quadrato compreso nel dato numero; essa considerata come radice di quest' ultimo, non è esatta, ma può rendersi più approssimata estendendola a piacere con più cifre decimali nel modo che verrà esposto quì appresso.

§. 154. Poichè il quadrato di una frazione si forma moltiplicando fra loro due frazioni identiche alla proposta, ed il prodotto di due frazioni è eguale al prodotto de' numeratori diviso pel prodotto de' denominatori, è chiaro che *il quadrato di una frazione è eguale al quadrato del suo numeratore diviso pel quadrato del denominatore*. Così il quadrato di $\frac{3}{4}$ è, $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$. Per estrarre dunque la radice quadra-

ta da una data frazione bisognerà estrarla dal numeratore e dal denominatore. Ma questa doppia operazione, quando il denominatore della frazione non è un quadrato perfetto, esige molto calcolo e molte precauzioni per giungere ad un risultamento alquanto esatto, e però si preferisce di *moltiplicare il numeratore della frazione pel denominatore, estrarre la radice dal prodotto ottenuto, e dividerla pel denominatore*; è facile dar ragione di questa pratica. Dovendo estrarre la radice quadrata dalla frazione $\frac{21}{26}$, si moltiplicheranno i suoi termini per 26, e si avrà la frazione equivalente $\frac{546}{26\times26}$ di cui il denominatore è un quadrato; e per estrarre la radice da ambedue i termini della nuova frazione, l'operazione si ridurrà ad estrarla dal solo prodotto 546, poichè la radice del denominatore è evidentemente 26. Molte volte non è necessario moltiplicare il numeratore della frazione pel denominatore a fine di ridurre quest' ultimo ad un quadrato, potendo ottenersi lo stesso intento con moltiplicare i termini della frazione per un numero più piccolo; così per estrarre la radice da $\frac{23}{32}$ basterà moltiplicarne i termini per 2, poichè il denominatore della nuova frazione $\frac{46}{64}$ è evidentemente il quadrato di 8, e la radice della proposta frazione si otterrà dividendo la radice di 46 per 8.

§. 155. Applichiamo questo principio alle frazioni decimali, e riflettiamo prima di tutto che, siccome moltiplicando per sè stessa l' unità seguita da zeri si raddoppia il numero degli zeri nel prodotto, così è chiaro che l' unità seguita da un numero pari di zeri è sempre un quadrato perfetto, i numeri 100,10000,1000000 etc. ne offrono l'esempio. Quindi per estrarre la radice quadrata da una data frazione decimale, 0,524, si dovrà prima di tutto render pari il numero delle sue cifre con l'aggiunta di un zero, se è necessario: perchè in tal modo il denominatore della frazione modificata 0,5240, dovendo contenere tanti zeri quante cifre decimali ha questa frazione (§. 105), sarà ridotto ad un quadrato, e si potrà estrarre la radice, operando sul decimale 0,5240 come su di un intero. Infatti la radice quadrata di 0,5240, ovvero di $\frac{5240}{10000}$, si ottiene estraendo la radice da 5240 e dividendola per 100, radice del denominatore 10000: e poichè la radice del numero 5240 è composta di due cifre, la divisione di essa per 100 sarà eseguita considerando quelle cifre come decimali, cioè scrivendo le due cifre 72 della radice di 5240 immediatamente dopo la virgola. Dunque, se la proposta frazione esprime diecimilesimi, la sua radice dovrà esprimer centesimi, e similmente, se la frazione data esprimesse centesimi la radice esprimerebbe decimi. In generale, *il numero delle cifre decimali della radice deve esser metà del numero delle cifre decimali del quadrato*, perchè l' estrazione della radice quadrata riduce a metà il numero degli zeri da cui è seguita l' unità del denominatore della data frazione decimale. Laonde *per estrarre la radice quadrata da un decimale qualunque*, senza aver riguardo al suo denominatore, *si renderà pari il numero delle cifre decimali, le quali si divideranno in coppie, e si estrarrà la radice come da un intero, non omettendo di notare tra le cifre della radice uno zero per ogni coppia di zeri che si trovasse a sinistra delle cifre significative del proposto decimale*. Così la radice quadrata di 0,0025 sarà 0,05, la radice di 0,002109 sarà 0,047; quella di 0,0144 sarà 0,12 etc.

Tutto ciò si applica immediatamente alla estrazione della radice quadrata *per approssimazione* da un numero intero che non sia un quadrato perfetto. Per esempio, volendo la radice quadrata di 2 con tre cifre decimali, si aggiungeranno sei zeri a destra del numero proposto, e con ciò esso sarà cambiato in un decimale avente per denominatore un quadrato; ed estraendo la radice, da 2,00 00 00 considerato come un numero intero, a norma della regola precedente, si otterrà 1,414. Allo stesso modo se si deve estrarre la radice quadrata da un numero intero accompagnato da cifre decimali, per esempio 234,323, e si voglia estesa sino ai diecimilesimi, siccome il numero delle cifre decimali del quadrato deve esser doppio di quello della radice, si aggiungeranno a destra del proposto numero cinque zeri, ed estratta la radice da 2 34,32 30 00 00, come da un numero intero, essa risulterà 15,3076.

§. 156. Per provare l'esattezza di una estrazione di radice quadrata, si eleva a quadrato la radice trovata, vi si aggiunge il resto ottenuto in fine dell' operazione, e la somma deve uguagliare il numero proposto.

Dell'estrazione della radice cubica dai numeri.

§. 157. Come l'estrazione della radice quadrata dipende dalla composizione del quadrato della somma di due numeri, così l'estrazione della radice cubica dipende dalla composizione del cubo della somma medesima.

Abbiamo veduto che il quadrato di $a+b$ è così espresso, $a^2+2a\times b+b^2$; e poichè il cubo di un numero si ottiene moltiplicando esso numero pel suo quadrato, il cubo di $a+b$ si avrà moltiplicando $a+b$ per $a^2+2a\times b+b^2$. Per eseguire questo prodotto bisogna ricordarsi che per moltiplicare la somma di più numeri per la somma di altri numeri, deve moltiplicarsi ciascun numero della prima somma per ciascun numero della seconda, e sommare tutti i prodotti ottenuti (§. 68); per conseguenza si moltiplicheranno i numeri a^2, $2a\times b$, b^2 prima per a e poi per b e si sommeranno i prodotti che ne emergono, come segue,

$$a^2\times a+2a\times b\times a+b^2\times a$$
$$+a^2\times b\quad+2a\times b\times b+b^2\times b.$$

E riflettendo che $a^2\times a=a^3$, $b\times b=b^2$, $b^2\times b=b^3$, e che i prodotti $2a\times b\times a$, e $b^2\times a$ possono anche scriversi così, $2a\times a\times b=2a^2\times b$, ed $a\times b^2$ (§. 86), il prodotto totale prenderà la forma,

$$a^3+2a^2\times b+a^2\times b+a\times b^2+2a\times b^2+b^3;$$

ma i due prodotti $2a^2\times b$, $a^2\times b$, potendo comprendersi in una sola espressione $3a^2\times b$, e similmente potendo scriversi $3a\times b^2$ in vece di $a\times b^2+2a\times b^2$, il cubo di $a+b$ nel suo aspetto più semplice sarà così espresso,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2\times b+3a\times b^2+b^3.$$

Ora, supponendo che i numeri a,b rappresentino rispettivamente le decine e le unità nelle quali può scomporsi un numero qualunque, e traducendo in linguaggio ordinario l'eguaglianza precedente, ne segue che, *il cubo di un numero composto di decine ed unità contiene quattro parti, cioè il cubo delle decine, il triplo del quadrato delle decine moltiplicato per le unità, il triplo delle decine moltiplicato pel quadrato delle unità ed il cubo delle unità.*

§. 158. Applichiamo questa regola alla formazione del cubo di 47, e sarà $a=40$, $b=7$; e quindi

$a^3=40^3$	$=$ 64 0 00		
$3a^2\times b=3\times16{\cdot}00\times7=48{\cdot}00\times7$	$=$ 33 6.00	}	398·23
$3a\times b^2=3\times40\times49$	$=$ 5 8 80	}	
$b^3=7^3$	$=$ 3 43	}	
Totale.........$=47^3$	$=$103 8 23		

Da questo quadro si scorge. 1.° che il cubo delle decine non ha cifre significative inferiori alle migliaia, nè potrebbe mai averne, poichè moltiplicando due volte per sè stesso un numero che termina con zero il prodotto finale deve contenere tre zeri; 2.° che il triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità è il maggior dei quattro termini, dopo il cubo delle decine, e non contiene cifre significative inferiori alle centinaia, perchè il quadrato 1600 delle decine, che è fattore in quel termine, deve necessariamente finire con due zeri. Queste osservazioni ci saranno di guida nella estrazione della radice cubica.

Si separino tre cifre a destra del numero proposto 103823, e si disponga l'operazione come qui appresso;

103·823	47	
64		
39 8·23	48	48
39 8 23		84
00 0 00		49
		5689
		7
		39823

Il cubo delle decine non potendo contenere cifre significative di un ordine inferiore alle migliaia, dovrà esser compreso nelle tre cifre che rimangono a sinistra, e siccome il maggior cubo contenuto in 103 è 64 (§. 142), che ha per radice 4, sarà questa la cifra delle decine della radice del numero proposto. Si sottragga 64 da 103, ed il resto 39 rappresenterà le migliaia provenienti principalmente dal triplo del quadrato delle decine moltiplicato per le unità, il quale non potendo contenere che centinaia, dovrà esser compreso nelle prime tre cifre 398 del numero 39823 che si ottiene abbassando l' ultimo ternario. E riflettendo che nella composizione del cubo la maggior parte del numero 398 rappresenta il prodotto di 48 per 7, è chiaro che per ottenere questa seconda cifra della radice si dovrà dividere il numero 398 poco maggiore di quel prodotto per uno de' suoi fattori 48, indicante il triplo del quadrato delle decine della radice. Si formerà dunque questo triplo quadrato, e si esaminerà quante volte è contenuto in 398; si otterrà così il numero 8, ma prima di adottarlo per seconda cifra della radice, si proverà se gli ultimi tre termini del cubo, composto co' numeri 40 ed 8, ed insieme riuniti, fanno una somma eguale o minore del resto 39823 che deve comprenderli tutti. Ora, la somma del triplo quadrato 4800 moltiplicato per 8, del triplo delle decine 120 moltiplicato per 64, (quadrato di 8), e di 512 (cubo di 8) ascende a 46492, che essendo maggiore del resto 39823, mostra essere la cifra 8 eccedente. Si passerà quindi a sperimentare la cifra 7, e per abbreviare la operazione, al triplo quadrato 4800 si aggiungerà il triplo del prodotto di 40 per 7, cioè 840, ed il quadrato di 7, che è 49; la somma ottenuta 5689 si moltiplicherà per 7, ed il prodotto rappresenterà i tre ultimi termini del cubo, perocchè il prodotto del numero 7 per la somma $3\times40^2+3\times40\times7+7\times7$ è composto dei tre prodotti (§. 68) $3\times40^2\times7$, $3\times40\times7\times7$, $7\times7\times7$, cioè del triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità, del triplo delle decine moltiplicato pel quadrato delle unità o del cubo delle unità. I tre numeri 4800, 840, 49 da aggiungersi fra loro potranno anche scriversi omettendo gli zeri de' primi due con situarli uno sotto l'altro sempre con una cifra in fuori verso la destra, siccome si vede nell' esempio. Eseguito in tal modo il calcolo con la cifra 7, si ottiene 39823 per somma de' tre termini riuniti, per cui se ne conchiude che la radice del numero proposto 103823 è 47.

§. 159. Per trovare la radice cubica di un numero che contenga più di sei cifre, come 105823817, essa si supporrà anche composta di decine e di unità, e separando un primo ternario a destra, il cubo delle decine dovrà esser compreso nel numero 105823, ma questo, contenendo più di tre cifre, la sua radice dovrà averne almeno due. poichè il cubo del più piccolo numero di due cifre, qual' è 10, ne contiene quattro. Quindi per estrarre la radice cubica da 105823 si procederà come si è fatto qui sopra per ottenere una radice di due cifre; trovata la quale, si cercherà la terza cifra nello stesso modo usato per trovare la seconda. Trascriviamo qui appresso tutta l' operazione;

105·823·817	473		
64			
418·23	48	48.	48
		84	168
398 23		49.	147
20 008·17	6627	5689	6627
		7	423
20 008 17		39023	9
00 000 00			666939
			3
			2000817

dove faremo osservare che il triplo quadrato di 47, che serve per trovare la terza cifra della radice, si è dedotto dai numeri 48, 84, 49 già considerati, aggiungendo il primo,come sta,al doppio del secondo ed al triplo del terzo,senza alterare la posizione delle loro ultime cifre a destra. Questa importante abbreviazione è giustificata riflettendo che il quadrato di 47, o di 40+7, ed in generale il quadrato di una somma

$a+b$ è rappresentato dalla espressione $a^2+2\times ab+b^2$, ed il suo triplo da $3\times a^2+6\times ab+3\times b^2$, cioè dal numero $3\times a^2$, che corrisponde a 48, più il doppio di $3\times ab$, ovvero il doppio di 84, più il triplo di b^2, ovvero il triplo di 49.

Se il numero proposto contenesse più di nove cifre la sua radice ne conterrebbe più di tre, ma sarebbe egualmente facile di ridurre l'operazione ad un caso più semplice: ed in generale per estrarre la radice cubica da un numero qualunque si divideranno le sue cifre a tre a tre cominciando dalla destra, e si estrarrà la radice dall'ultimo gruppo che rimane a sinistra; indi a fianco de' successivi resti si abbasseranno uno dopo l'altro i seguenti ternarii, si farà il triplo quadrato della parte della radice già trovata, e si troveranno con la divisione le rimanenti cifre della radice, ciascuna delle quali non dovrà adottarsi senza averne fatto innanzi la pruova colla formazione degli ultimi tre termini del cubo nel modo indicato.

§. 160. Con un procedimento non dissimile da quello tenuto per la radice quadrata, se dovesse estrarsi la radice cubica da una frazione qualunque bisognerebbe prima ridurre a cubo perfetto il suo denominatore ed indi estrarre la radice da ambi i termini. Così la radice cubica di $\frac{2}{3}$ si ottorrà cambiando questa frazione in $\frac{18}{27}$, di cui la radice sarà quella del numero 18 divisa per 3. E similmente la radice $\frac{9}{16}$ si avrà riducendo questa frazione a $\frac{36}{64}$ estraendo la radice cubica da 36, e dividendola per 4.

Per estendere poi la radice cubica di un dato numero sino ad una cifra decimale convenuta, bisognerà dare al cubo tre cifre decimali per ogni cifra decimale della radice. Per esempio la radice cubica di 1024 con tre cifre decimali si otterrà aggiungendo al numero proposto nove zeri, ed estraendo la radice cubica da 1·024,000·000·000 come da un numero intero; e la radice di 31,2534 con due cifre decimali si avrà estraendo la radice cubica da 31,253·400.

Analogamente a quanto si è detto nel §. 129, se da un dato numero limitato e soggetto all' ordinario errore nell' ultima cifra a destra dovrà estrarsi la radice quadrata o cubica, e si voglia conoscere l' errore che ricade su quella radice, si applicheranno le regole seguenti. *Rispetto alla radice quadrata, l' errore della medesima si conoscerà dividendo l' unità dell' ordine dell' ultima cifra a destra del numero dato pel quadruplo di essa radice; e l'errore sulla radice cubica sarà espresso da quella medesima unità divisa pel sestuplo del quadrato della radice.* Così, essendo dato il decimale 25,331, che si suppone contenere al più l' errore di un mezzo millesimo, l'errore sulla sua radice quadrata sarà $\frac{0,001}{4\times\sqrt{25}}=\frac{0,001}{4\times5}=0,00005$ circa, o l' errore sulla sua radice cubica sarà $\frac{0,001}{6\times\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{25}}=\frac{0,001}{6\times2,9\times2,9}=\frac{0,001}{50}=0,00002$ circa; cioè ciascuna di quelle radici sarà esatta fra un diecimilesimo (*).

§. 161. Finalmente potrebbe domandarsi la radice quadrata o cubica di una frazione o di un numero intero approssimata sino ad una unità frazionaria di dato denominatore, come se si volesse la radice quadrata o cubica di 2, o di $\frac{3}{5}$ approssimata sino ad un *sessantesimo*. In tal caso è chiaro che bisognerà trasformare il numero o la frazione proposta in una frazione avente per denominatore il quadrato o il cubo del denominatore assegnato, ed estrarre la radice dal numeratore di tal frazione. La radice quadrata di 2 approssimata sino ad un sessantesimo sarà quella di $\frac{2\times60^2}{60^2}=\frac{7200}{60^2}$, e si otterrà estraendo la radice quadrata da 7200, ed assegnandole per denominatore 60: per dare alla radice cubica di $\frac{3}{5}$ la stessa approssimazione si cambierà questa frazione in $\frac{3\times12\times60^2}{5\times12\times60}=\frac{129600}{60^3}$ ed estratta la radice

---

(*) Le dimostrazioni di questa regola, di quelle date a pag. 61, 62, 63, e di altre che abbisognano del calcolo algebrico, sono esposte nell' *Appendice* al presente trattato.

cubica da 129600 le si darà per denominatore 60. Da ultimo volendo la radice quadrata di $\frac{2}{3}$ esatta sino ad un *trentaduesimo* si trasformerà questa frazione in $\frac{\frac{2}{3}\times 32^2}{32^2}=\frac{682\frac{2}{3}}{32^2}$, e si troverà la radice di 683 (o più esattamente di 682,6666....) cui si darà per denominatore 32. Questi esempii potranno servire di norma nei casi simili.

CAPO VI.

DE' NUMERI CONCRETI E COMPLESSI.

Considerazioni generali.

§. 162. Finora abbiamo considerato ne' calcoli i numeri *astratti*, cioè quelli ne' quali la natura o la specie dell' unità non è definita; ma è chiaro che le regole esposte rimarrebbero infruttuose se non se ne facesse la applicazione ai numeri che occorrono effettivamente nelle convenzioni sociali, cioè ai numeri *concreti* (§. 14). Il calcolo di questi numeri, quando l' unità non può dividersi in parti, o quando la divisione si fa decimalmente, non differisce dal calcolo de' numeri astratti ; così se volesse sapersi il costo di 51 buoi, essendosi convenuto per ogni bue il prezzo di 75 ducati e 24 grana, l'operazione si ridurrebbe a moltiplicare 75,24 per 51. Se però in vece del ducato napolitano, che ha il pregio della suddivisione decimale , dovesse adoperarsi la lira toscana che si divide in 20 soldi, e ciascun soldo in 12 denari, e si trattasse di valutare il costo di un valore la cui quantità in lunghezza fosse espressa per canne e parti di canna (essendo l' antica canna napoletana divisa in 8 palmi, il palmo in 12 once e l' oncia in 5 minuti), l'operazione di moltiplicare, per esempio, 15 *lire* 6 *soldi* e 3 *denari* per 4 *canne* 5 *palmi* e 7 *once* non potrebbe eseguirsi con le regole date pei numeri astratti.

Diconsi numeri *complessi* questi numeri concreti ne'quali le unità principali sono divise in un numero di parti stabilito dall' uso , e ciascuna parte è suddivisa anche in un numero convenuto di altre parti più piccole, e così di seguito. Il calcolo de' numeri complessi esige dunque avvertenze e regole speciali, ma le seguenti osservazioni sono comuni a tutti i numeri concreti.

§. 163. 1.° *L' addizione e la sottrazione dei numeri concreti non può eseguirsi se non quando essi sono dello stesso genere;* è chiaro che un numero di uomini ed un numero di ducati non potrebbero riunirsi per formarne un solo, nè da un numero di botti di vino potrebbe togliersi un numero di botti d' olio (§. 80) etc.

2.° Siccome il prodotto di una moltiplicazione si forma per mezzo del moltiplicando (§. 26, 90), così *nella moltiplicazione de' numeri concreti il prodotto sarà sempre dello stesso genere del moltiplicando, ed il moltiplicatore figurerà da numero astratto.* Per esempio, volendo conoscere il costo di 25 tomoli di grano al prezzo di ducati 2 e grana 24 per ogni tomolo, si moltiplicherà 2,24 per 25, ed il prodotto 56 esprimerà *ducati* come il moltiplicando 2,24; e quantunque il moltiplicatore 25 sia un numero concreto, pure esso quì serve ad indicare soltanto che il numero 2,24 deve esser ripetuto 25 volte.

La moltiplicazione di due o più numeri concreti della stessa specie non può eseguirsi perchè il prodotto non avrebbe alcun significato. Così la moltiplicazione di 34 rotoli di caffè per 15 rotoli dello stesso caffè non potrebbe avere alcun oggetto; che se dovessero cambiarsi fra negozianti due specie diverse di caffè, e fosse convenuto che ogni rotolo della prima sorta valesse rotoli $2\frac{1}{2}$ della seconda, per conoscere, a cagion d'esempio, quanto caffè della seconda sorta dovrebbe darsi in cambio di 34 rotoli della prima, servirebbe la moltiplicazione di $2\frac{1}{2}$ per 34, ma anche in questa operazione 34 figurerebbe da numero astratto. La moltiplicazione di due numeri concreti della stessa specie è possibile quando essi indicano la lunghezza e la larghezza di un oggetto qualunque esteso per due direzioni, come un campo, una strada, una tavola etc., ma una tale operazione richiede, come si vedrà, particolari avvertenze.

3.° Poichè nella divisione il dividendo rappresenta un prodotto di cui sono fattori il divisore e il quoziente, trattandosi di numeri concreti può accadere, secondo i diversi casi, che il quoziente sia dello stesso genere del dividendo ed allora il divisore, il quale sarà necessariamente di specie diversa, figurerà da numero astratto, e viceversa il divisore può essere dello stesso genere del dividendo, ed allora il quoziente sarà di genere diverso e figurerà da numero astratto. Per esempio, se con 56 ducati si sono comprati 25 tomoli di grano, e si voglia conoscere il costo di un sol tomolo, bisognerà dividere 56 ducati per 25 tomoli, ed il quoziente esprimerà *ducati* come il dividendo; il divisore in questo caso figurerà da numero astratto perchè l'operazione si riduce a decomporre 56 ducati in tante parti eguali quante unità si contengono nel numero 25. Ma se con 56 ducati si voglia comprare del grano a ducati 2,24 il tomolo, per sapere quanti tomoli se ne potranno acquistare bisognerà dividere 56 ducati per 2,24 ducati; in questo caso il divisore sarà dello stesso genere del dividendo ed il quoziente figurerà da numero astratto, perchè esprime quante volte 2,24 ducati sono contenuti in 56 ducati. Tutto ciò è coerente a quanto si è detto nel §. 38 de' diversi aspetti sotto i quali può riguardarsi la divisione.

In generale, *il quoziente di un numero concreto per un altro dello stesso genere dovrà considerarsi come un numero* ASTRATTO. Questa verità è di un'alta importanza perchè se ne fa uso assai frequentemente in tutte le scienze matematiche.

Dell' addizione e della sottrazione de' numeri complessi.

§. 164. Nei numeri complessi si considera, come abbiamo già detto, l'unità principale divisa e suddivisa in parti sempre più piccole, il numero delle quali vien determinato dall'uso. Così la *tesa*, misura francese di lunghezza, si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, e la linea in 12 *punti*. Dunque un numero complesso qualunque, per esempio 14 *tese* 5 *piedi* 10 *pollici* 8 *linee*, contiene diverse classi di unità di grado in grado più piccole derivate le une dalle altre secondo una suddivisione convenuta; l'unità principale si chiama la *prima specie*, e l'ultima o la più piccola dicesi *l'ultima specie*. Nell'esempio addotto la prima specie è la *tesa*, e l'ultima specie è la *linea*.

§. 165. Ciò premesso, l'addizione de' numeri complessi poco differisce da quella de' numeri interi: *si scrivono i numeri proposti uno sotto l'altro, situando nella medesima colonna le unità della stessa classe; si comincia l'addizione dalle unità dell ultima specie, e quando la loro somma sorpassa il numero di cui si compone l'unità della specie precedente, si riportano una o più di queste unità alla colonna cui appartengono; si fa l'addizione de' numeri contenuti nella nuova colonna, e dalla somma ottenuta si estraggono, se ve ne sono, le unità appartenenti alla terza colonna, e così andando avanti.* Seguono gli esempii.

canne	*palmi*	*once*	*minuti*
4 .	6 .	8 .	4
16 .	2 .	3 .	1
	4 .	11 .	3
1 .	0 .	0 .	2
22 .	6 .	0 .	0

tese	*piedi*	*pollici*	*linee*
14 .	5 .	10 .	8
3 .	4 .	11 .	2
1 .	5 .	0 .	10
	4 .	8 .	7
21 .	2 .	7 .	3

La somma de' minuti essendo 10, corrisponde esattamente a 2 once, e perciò si è scritto *zero* nel luogo de' minuti, e si son riportate le due once nella colonna cui appartenevano; similmente la somma 24 di questa colonna equivalendo a 2 palmi, si sono essi riportati nella propria colonna ed è restato vuoto anche il luogo delle once. Finalmente dalla somma 14 de' palmi si è estratta una canna che si è aggiunta alle altre canne, e si è scritto il resto 6 nella colonna de' palmi. L'addizione delle tese è stata regolata allo stesso modo.

§. 166. *La sottrazione de' numeri complessi si fa disponendo i numeri proposti come nell'addizione, e cominciando l'operazione dall' ultima specie: quando in qualche classe il numero da sottrarsi è maggiore di quello da cui deve togliersi, si aggiunge a quest' ultimo un' unità improntata dalla classe precedente, dopo averla ridotta in unità della specie inferiore sulla quale si esegue la sottrazione.* Ecco alcuni esempii.

giorni	*ore*	*minuti*	*secondi*
2 .	22 .	45 .	10,3
1 .	0 .	50 .	2,4
1 .	21 .	55 .	7,9

canne	*palmi*	*once*	*minuti*
3 .	5 .	0 .	4
1 .	7 .	3 .	2
1 .	5 .	9 .	2

Nella prima sottrazione si è considerato il giorno con le sue suddivisioni; ognun sa che il *giorno* si divide in 24 *ore*, l'ora in 60 *minuti*, ed il minuto in 60 *secondi;* il secondo si divide anche in 60 *terzi*, ma le parti del secondo sogliono più generalmente assegnarsi per mezzo di frazioni decimali, come nell'esempio. Cominciando l'operazione dall' ultima specie, cioè dai secondi, si è sottratto il decimale 2,4 dall'altro 10,3; indi dovendo togliere 50 minuti da 45, si è improntata un'ora dalla colonna precedente, che ridotta in minuti ed aggiunta a 45 ha dato 105, da cui si è sottratto 50, e si è avuto per resto 55. La sottrazione di canne non presenta maggiori difficoltà.

Riduzione di un numero complesso a numero incomplesso e viceversa

§. 167. L'addizione e la sottrazione si eseguono , come abbiamo veduto, su i numeri complessi senza cangiarne la forma; ma non accade lo stesso della divisione , ed in taluni casi anche della moltiplicazione , le quali operazioni esigono che i numeri complessi prendano l'aspetto di numeri *incomplessi*, cioè, di numeri che contengono una sola specie di unità, a simiglianza de' numeri astratti. E però è necessario mostrare come un numero complesso si possa mutare in numero incomplesso e viceversa.

§. 168. 1.° Un numero complesso qualunqne, come per esempio 8^{tese} 3^{piedi} $4^{pollici}$ 8^{linee}, sarà ridotto a numero incomplesso quando la frazione dell'unità principale, 3^{piedi} $4^{pollici}$ 8^{linee}, espressa con diverse unità relative alle *specie* secondarie,sarà ridotta a frazione ordinaria o a frazione decimale. Per ridurla a frazione ordinaria basterà trovare quante linee, o unità dell' ultima specie, contiene la tesa e quante ne contiene il numero 3^{piedi} $4^{pollici}$ 8^{linee} ; perocchè, supponendo che la tesa contenga 864 linee, e che quel numero ne contenga 488, è chiaro che una linea sarà $\frac{1}{864}$ di tesa, e 3^{piedi} $4^{pollici}$ 8^{linee}, pari a 488 linee, equivarrà a $\frac{488}{864}$ di tesa. Ora, ricordandosi la divisione della tesa in piedi, pollici e linee si ha ,

1 *tesa*=6*piedi*= 6×12*pollici*=6×12×12*linee*, ossia
1 *tesa*=6*piedi*=72*pollici*=864*linee*
1 *piede*=12*pollici*=144*linee*
1 *pollice*= 12*linee*

D'altra parte, per ridurre in linee 3^{piedi} $4^{pollici}$ 8^{linee} si dirà, 3 piedi equivalgono a 3×12=36 *pollici*, che uniti a 4 pollici fanno 40 pollici, i quali pareggiano 40×12=480 *linee*, cui aggiunte 8 linee, si hanno in tutto 488 linee. Si darà alle operazioni indicate il seguente andamento ;

1 *tesa*	3 *piedi*	8 *tese*
6	12	6
6 *piedi*	36 *pol.*=3^{piedi}	48
12	4	3
72 *pollici*	40 *pol*=3^{piedi} $4^{pollici}$	51 *pie.*=$8^{t}.3^{p}$.
12	12	12
144	480 *linee*=3^{piedi} $4^{pollici}$	102
72	8	51
864 *linee*	488 *linee*=$3^{piedi}4^{pollici}8^{linee}$	4
		616 *pol.*=$8^{t}.3^{p}.4^{pp}$.
		12
		1232
		616
		8
		7400 *lin.*=$8^{t}.3^{p}.4^{pp}.8^{l}$.

Il dato numero complesso 8^{tese} 3^{piedi} $4^{pollici}$ 8^{linee} si è ridotto così al numero incomplesso $8\frac{488}{864}$. Ma volendolo sotto forma di frazione, converrà

meglio cominciare dal ridurre le tese in piedi, e poi in pollici, ed indi in linee, come si vede praticato nell' ultima parte del quadro precedente da cui risulta che il proposto numero complesso corrisponde alla frazione $\frac{7400}{864}$.

§. 169. La riduzione di un numero complesso ad incomplesso eseguita nel modo ora indicato non conduce ordinariamente alla più semplice espressione di quel numero. Così il numero $8\frac{488}{864}$ si esprime più semplicemente con $8\frac{61}{108}$, e quest' ultimo risultamento si potrebbe ottenere direttamente con un andamento diverso. Cominciando dall' *ultima specie*, si dirà : 8 *linee* sono $\frac{8}{12}$ ovvero $\frac{2}{3}$ di *pollice*, e perciò $4^{pollici}\ 8^{linee}$ equivalgono a $4\frac{2}{3}$ *pollici*$=\frac{14}{3}$ *di pollice*; ed essendo il pollice la dodicesima parte del piede si avrà $4^{pollici}\ 8^{linee}=\frac{14}{3}:12=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$ *di piede*; quindi $3^{piedi}\ 4^{pollici}\ 8^{linee}$ si ridurranno a $3\frac{7}{18}$*piedi*$=\frac{61}{18}$*di piede*; ma ogni piede è sesta parte della tesa, dunque $\frac{61}{18}$ *di piede* $=\frac{61}{18}:6$ *di tesa*$=\frac{61}{108}$ *di tesa*, come sopra. Le operazioni qui indicate possono disporsi come segue;

3^{piedi}	$4^{pollici}$	8^{linee}
$3\frac{7}{18}$	$4\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$ *di pollice*
$\frac{61}{18}$ *di piede*	$\frac{14}{3}$ *di pollice*	$\frac{2}{3}$
$\frac{61}{108}$ *di tesa*	$\frac{14}{36}$ *di piede*	
	$\frac{7}{18}$	

Per un altro esempio, debbano ridursi 12 *ore*, 24 *minuti*, e 35 *secondi* in frazione ordinaria di *giorno*; si avrà

12^{ore}	24^{minuti}	$35^{secondi}$
$12\frac{59}{144}$	$24\frac{7}{12}$	$\frac{35}{60}$ *di minuto*
288	48	$\frac{7}{12}$
144	24	
59	7	
1787 *di ora*	295 *di minuto*	
144	12	
$\frac{1787}{3456}$ *di giorno*	$\frac{59}{144}$ *di ora*	

§. 170 Per ridurre una frazione di numero complesso in frazione decimale dell' unità principale si userà il metodo precedente, con la sola

differenza che in vece di ridurre i numeri di ciascuna specie in frazioni ordinarie della specie precedente, si ridurranno in frazioni decimali. Così, 8 *linee*, che sono $\frac{8}{12}$ *di pollice*, si ridurranno a 0,666... *pol.*, cui aggiunti 4 pollici, si avranno 4,666... *pol.*; per ridurre questo numero a frazione decimale di piedi si dividerà per 12, onde si cambierà in 0,3888... *piedi*; e finalmente, aggiunti 3 piedi a questa frazione, si otterrà 3,3888...che sarà ridotto a frazione decimale di tesa dividendolo per 6. Il quoziente 0,56481481... indicherà la frazione decimale di tesa corrispondente a $3^{piedi}\ 4^{pollici}\ 8^{linee}$. Ecco l' andamento del calcolo

8,00	12		
80	0,666...	12	
	4,666		
	1 06	0,38888...	
	106	3,38888	6
		38	0,56481...
		28	
		48	
		08	

La riduzione di $12^{ore}\ 24^{minuti}\ 35^{secondi}$ in frazione decimale di giorno si eseguirà analogamente come quì appresso;

35,00	60		
5 0	0,58333...		
20	24,58333	60	
	0,58	0,4097222...	
	43	12,4097222	24
	13	40	
	13	169	0,51707175...
		172	
		42	
		182	
		14	

§. 171. 2.° Per convertire una frazione ordinaria o una frazione decimale dell' unità principale in frazione complessa, l' operazione dovrà incominciare dalla prima *specie* e progredire verso l' ultima. Si voglia ridurre in frazione complessa la frazione ordinaria $\frac{61}{108}$ di tesa; considerando questa frazione come una divisione indicata, di 61 tese per 108, si ridurranno le tese in piedi moltiplicandole per 6, a fin di poter eseguire l' operazione, ed il prodotto 366 diviso per 108 darà per quozlente 3 piedi, con un resto di 42 piedi da dividersi per 108. Per effettuare questa divisione si ridurranno i piedi in pollici moltiplicandoli per 12, ed

il prodotto 504 diviso per 108 darà per quoziente 4 pollici con un resto di 72 pollici, che ridotti similmente in linee si cambieranno in 864 linee, le quali divise per 108 daranno per ultimo quoziente 8 linee.

Le sole moltiplicazioni successive ora indicate, senza le divisioni, basteranno per ridurre una frazione decimale in frazione complessa. Così, si moltiplicherà 0,56481... *tese* per 6, e si otterrà 3,38888..., che esprimerà 3 piedi con una frazione decimale di piede ; si moltiplicherà questa frazione decimale per 12, e si avrà 4,6666..., cioè 4 pollici ed una frazione di pollice; ed in fine si moltiplicherà 0,6666... per 12, e si avrà per prodotto 8 linee. Tutto ciò apparirà più manifesto ne' seguenti modelli di calcolo.

Tese	*Tese*	*Giorni*
61	0, 56481	0, 51707175
6	6	24
366 | 108	3p. | 38886	206828700
42 | 3piedi 4pollici 8linee	12	103414350
12	77772	12o. | 40972200
84	38886	60
42	4p. | 66632	24m. | 583320
504	12	60
72	133264	34s. | 999200
12	66632	
144	7l. | 99584	
72		
864		
000		

Della moltiplicazione de' numeri complessi.

§. 172. Premessa la conversione de' numeri complessi in numeri incomplessi e viceversa, la moltiplicazione de' numeri complessi potrà eseguirsi, *riducendo in frazioni ordinarie o decimali della* prima specie *le frazioni complesse contenute nel moltiplicando e nel moltiplicatore, eseguendo la moltiplicazione come si è praticato pe' numeri astratti* (§§. 95, 114), *e convertendo in frazione complessa la frazione ordinaria annessa al prodotto ottenuto*. Per esempio, debba calcolarsi il costo di 8*canne* 6*palmi* 3*once* di una stoffa che si è comprata a 20*lire* 14*soldi* 8*denari* la canna: la frazione 6*palmi* 3*once* di canna equivale a $\frac{25}{32}$, e la frazione 14*soldi* 8*denari* di lira corrisponde ad $\frac{11}{15}$; quindi si moltiplicherà $20\frac{11}{15}$ per $8\frac{25}{32}$ e si otterrà il prodotto $182\frac{31}{480}$, il quale dovrà esprimer lire, e riducendo in frazione complessa di lira la frazione ordinaria $\frac{31}{480}$, il costo domandato sarà $182^{l}.\ 1^{s}.\ 3^{d}\ \frac{1}{2}$. Si otterrebbe lo stesso risultamento riducendo le frazioni complesse de' due fattori in frazioni decimali, e rimettendo sotto forma di

frazione complessa la frazione decimale annessa al prodotto. Ed in questa operazione si potrebbero in alcuni casi, per brevità di calcolo, adoperare anche insieme le frazioni decimali e le frazioni ordinarie, come qui appresso.

Frazione di lira

14^{soldi} 8^{denari}

$14\frac{2}{3}$. | 20

$0,7\frac{1}{3}$

Frazione di canna

6^{palmi} 3^{once}

6,25 | 8

65 | $0,78\frac{1}{8}$

Moltiplicazione

$20,7\frac{1}{3}$
$8,78\frac{1}{8}$
$16\ 56\frac{1}{24}$
144 9
1656
$25\frac{7}{8}$
$2\ 92\frac{2}{3}$
$182^{l}.|0\ 64\frac{7}{12}$
20
1280
$11\frac{2}{3}$
$1^{s}.|291\frac{2}{3}$
12
582
291
8
$3^{d}.|500$

La moltiplicazione de'numeri complessi suole anche eseguirsi riducendo all' ultima specie ed indi ad una sola frazione ordinaria ciascuno dei due fattori nel modo esposto nel §. 168, moltiplicando fra loro le frazioni così ottenute, e cambiando in numero complesso il prodotto delle due frazioni.

§. 173. Ma la moltiplicazione de' numeri complessi si esegue a preferenza col metodo, così detto, *di prendere in parti.* Questo metodo è utilissimo perchè aguzza l' ingegno de' giovani allievi, e si applica anche con vantaggio ne' calcoli numerici relativi a qualunque altro argomento, e specialmente a quelli dell' astronomia pratica. Sia in primo luogo da moltiplicarsi un numero complesso, 20^{lire} 14^{soldi} 8^{denari} per un numero incomplesso 8^{canne}. Essendo il moltiplicando composto di più parti, analogamente al principio enunciato nel §. 68, si moltiplica ciascuna di esse separatamente pel moltiplicatore, e si sommano i prodotti ottenuti. Per eseguire queste moltiplicazioni parziali si considera ogni parte decomposta in parti più piccole, ma tali che ciascuna sia contenuta un esatto numero di volte nella parte precedente, cioè che sia, come suol dirsi, una parte *aliquota* della medesima; ed ogni prodotto si forma servendosi del principio accennato nel §. 96, *che in qualsivoglia moltiplicazione, se si divide uno dei due* fattori *per un numero qualunque*,

il prodotto risulta diviso per lo stesso numero. Tutto ciò rimane meglio dichiarato dall' esempio;

$20^l . 14^s . 8^d$
8^c
160^l
per 10 *soldi* 4
per 4 *soldi* .... 1 . 12^s
per 2 *soldi* .... 16^s
per 8 *denari*.............. $5^s . 4^d$
Totale...... $165^l . 17^s . 4^d$

Per moltiplicare 8 *canne* per 14 *soldi*, si è considerato il moltiplicando 14 decomposto in 10 *soldi* e 4 soldi, e si è detto; se il prodotto di 8 *canne* per 1 *lira*, darebbe 8 *lire*, il prodotto di 8 *canne* per 10 *soldi*, che sono metà di una lira, dovrà dare la metà di 8 *lire*, cioè 4 lire; ed il prodotto di 8 *canne* per 4 *soldi*, che sono la quinta parte di una lira, dovrà dare la quinta parte di 8 lire, cioè $1^l . 12^s$. Per formare il prodotto per 8 *denari* si è preparato prima il prodotto *ausiliare* per 2 *soldi*, prendendo la metà del prodotto precedente, e poi si è detto; se il prodotto per 2 *soldi* è stato 16 *soldi*, il prodotto per 8 *denari*, che sono la terza parte di 2 soldi, sarà la terza parte di 16 soldi, cioè $5^s . 4^d$. Il prodotto per 2 *soldi*, che non doveva far parte del prodotto totale, si è trasportato più a destra escludendolo dalla somma.

§. 174. In secondo luogo sia da moltiplicarsi lo stesso numero complesso $20^l . 14^s . 8^d$ per l' altro numero complesso $8^{canne} 6^{palmi} 3^{once}$. L' operazione procederà nel modo seguente.

$20^l . 14^s . 8^d$
$8^c . 6^p . 3^{on}$
160^l
per 10 *soldi*.................... 4
per 4 *soldi*.................... 1 . 12^s
per 2 *soldi*.. 16^s
per 8 *denari*............................ 5 . 4^d
per 4 *palmi*...................... 10 . 7 . 4
per 2 *palmi*..................... 5 . 3 . 8
per 1 *palmo*.. $2^l . 11^s . 10^d$
per 3 *once*.......................... 12 . $11\frac{1}{2}$
Prodotto totale...... 182 . 1 . $3^d\frac{1}{2}$

Dopo aver eseguito come sopra il prodotto di 8 *canne* per tutto il moltiplicando, si è proceduto alla formazione de' prodotti di 6 *palmi* e di 3 *once* pel moltiplicando stesso (§. 68). Si è considerato il moltiplicatore 6 *palmi* decomposto in 4 palmi e 2 palmi, e si è detto; se il prodotto di 1 canna per $20^l . 14^s . 8^d$ darebbe $20^l . 14^s . 8^d$, il prodotto di 4 *palmi*, che sono metà di una canna, per lo stesso numero darà la metà di $20^l . 14^s . 8^d$, cioè $10^l . 7^s . 4^d$; ed il prodotto di 2 *palmi*, metà di 4 palmi, per $20^l . 14^s . 8^d$ darà la metà di $10^l . 7^s . 4^d$, cioè $5^l . 3^s . 8^d$. Per passare al prodotto di 3 *once* per $20^l . 14^s . 8^d$, si è dovuto anche quì premettere il prodotto *ausiliare* per un palmo, del quale si è presa poi la quarta parte.

§. 175. Per un altro esempio, sia proposta la seguente quistione: due mercanti, volendo fare tra loro un cambio di pepe con cannella, convengono che una libbra di cannella debba equivalere a $5^{rotoli}\ 15^{once}\ 7^{dramme}\ 2^{scrupoli}\ 17^{acini}$ di pepe; si domanda quanto pepe dovrà darsi in cambio di $12^{libbre}\ 4^{once}\ 6^{dramme}\ 1^{scrupolo}$ di cannella? È chiaro che la quantità di pepe da darsi in cambio si conoscerà moltiplicando $5^{rotoli}\ 15^{once}$ etc. per $12^{lib.}\ 4^{on.}$ etc. Per eseguire questa moltiplicazione deve premettersi che il *rotolo* di Napoli, prima della legge del 6 Aprile 1840, si divideva in *once* $33\frac{1}{3}$, l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in tre *scrupoli o trappesi*, lo scrupolo in 20 *acini*; e la libbra napolitana si componeva di 12 *once*, eguali a quelle del rotolo, e similmente divise. Ma sarebbe molto incomodo ritenere nel calcolo la frazione di rotolo sotto l'aspetto di frazione complessa, laddove con grande facilità può ridursi a frazione decimale: in fatti ogni oncia essendo $\frac{1}{33\frac{1}{3}}$, ovvero $\frac{3}{100}$, di rotolo, un dato numero di once si ridurrà a centesimi di rotolo moltiplicandolo per 3; similmente la dramma, decima parte dell'oncia vale $\frac{3}{1000}$ di rotolo, ed un numero di dramme sarà ridotto in millesimi moltiplicandolo per 3; lo scrupolo, terza parte della dramma, vale $\frac{1}{1000}$ di rotolo; e l'acino, ventesima parte dello scrupolo, equivale a mezzo decimo di scrupolo, per cui un dato numero di acini sarà ridotto a decimi di scrupolo, ossia a diecimilesimi di rotolo, prendendone la metà. Per cambiare una frazione decimale di rotolo in frazione complessa si eseguiranno le operazioni contrarie, cioè si prenderà la terza parte de' centesimi e si avranno le once; abbassati i millesimi a fianco de' centesimi che rimangono, e presa la terza parte del numero risultante, si avrà per quoziente il numero delle dramme e per resto quello degli scrupoli; finalmente si raddoppieranno i diecimilesimi e si otterranno gli acini. Tutto ciò si vede applicato nell'operazione che segue.

$5^{rot}\ 15^{on}\ 7^{dr}\ 2^{sc}\ 17^{ac}$
45 8,5
21
285
5.47385
$12^{lib}\ 4^{on}\ 6^{dr}\ 1^{sc}$
10,94770
54 7385
per 4 once.................... 1 824617...($\frac{1}{3}$) *del moltiplicando*
per 5 dramme .... 228077...($\frac{1}{8}$) *del precedente*
per 1 dramma............... 45615...($\frac{1}{5}$) *del precedente*
per 1 scrupolo.............. 15205...($\frac{1}{3}$) *del precedente*
Totale.............. 67,799714
26^{on}
19
6^{dr}
$1^{sc}\ 14^{ac}$, 28
$67^{rot}\ 26^{on}\ 6^{dr}\ 1^{sc}\ 14^{ac}$, 28

§. 176. Il metodo di prendere in parti può servire anche in alcuni casi ad ottenere una quantità che, diversamente, dovrebbe risultare da due operazioni, cioè da una moltiplicazione e da una divisione. Per esempio, sapendosi che una macchina a vapore applicata ad una manifattura dà un prodotto di 540 *canne* 6 *palmi* e 5 *once* in 12 ore, si desidera sapere qual prodotto darà in 5 *ore* 33 *minuti* e 45 *secondi*? Per rispondere a questo quesito bisognerebbe dividere $540^c.\ 6^p.\ 5^{on}.$ per 12, a fin di conoscere il prodotto in un'ora, ottenuto il quale si moltiplicherebbe per $5^o.\ 33^m.\ 45^s$, e si avrebbe il prodotto cercato. Ma l'operazione procederà più semplicemente riflettendo che nella *metà* di un certo tempo la macchina deve dare la *metà* del prodotto corrispondente al tempo medesimo, nella *terza parte* di quel tempo deve dare la *terza parte* del prodotto, e così di seguito. Laonde si otterrà il prodotto domandato col metodo di prendere in parti, come qui appresso.

In 12 *ore* il prodotto della macchina è...$540^c.\ 6^p.\ 5^{on}$

In 4 *ore* il prodotto sarà *la terza parte*	180^c	. 2^p	. 1^{on}	. 3^m	$\frac{1}{3}$
In 1 *ora la quarta parte* del precedente	45	. 0	. 6	. 2	$\frac{1}{12}$
In 30 *minuti la metà*........................	22	. 4	. 3	. 1	$\frac{5}{24}$
In 3 *minuti la decima parte*..............	2	. 2	. 0	. 1	$\frac{29}{48}$
In 45 *secondi la quarta parte*..............	0	. 4	. 6	. 0	$\frac{77}{192}$
Somma *In* $5^{ore}\ 33^m\ .\ 45^s$ *il prodotto totale della macchina sarà*.........	250	. 5	. 5	. 3	$\frac{89}{192}$

Si avverte che nel prender le parti de'numeri dell'ultima specie quando vi è unita una frazione, bisogna prima ridurli ad una sola frazione e poi prenderne la parte domandata. Così per trovare la decima parte di $16^m\frac{1}{24}$, si ridurrà questa espressione a $\frac{385}{24}$ di minuto, di cui la decima parte sarà $\frac{385}{240}=1\frac{145}{240}=1\frac{29}{48}$. Ma sarà sempre più facile usare le frazioni decimali nel prender le parti dell'ultima specie, limitando il numero delle cifre decimali ad un ordine di unità così piccole che gli errori di calcolo su quella ultima cifra possano con certezza considerarsi insignificanti.

§. 177. Finalmente il metodo di *prendere in parti* si applica qualche volta con vantaggio anche alla moltiplicazione de' numeri astratti uniti alle frazioni. Per esempio, dovendo moltiplicare $54\frac{2}{3}$ per $41\frac{3}{4}$, in vece di eseguire i quattro prodotti di cui è parola nel §. 95 con le regole ordinarie, si potrà moltiplicare prima un intero per l'altro, poi prendere la terza parte di 41 e replicarla, onde ottenere il prodotto di 41 per $\frac{2}{3}$, indi prendere la metà di $54\frac{2}{3}$, e la metà della metà per formare il prodotto di $54\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, che comprenderà i due prodotti di 54 per $\frac{3}{4}$, e di $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$. Ecco il calcolo;

$$
\begin{array}{r}
54\frac{2}{3} \\
41\frac{3}{4} \\
\hline
54 \\
216 \\
13\frac{2}{3} \\
13\frac{2}{3} \\
27\frac{1}{3} \\
13\frac{2}{3} \\
\hline
2282\frac{1}{3}
\end{array}
$$

È chiaro che questa maniera di operare non può riuscir utile se non quando le frazioni unite agli interi sono molto semplici.

Della divisione de' numeri complessi.

§. 178. Nella divisione de' numeri complessi possono considerarsi due casi;

1.° *quando il dividendo ed il divisore sono di diverso genere,*

2.° *quando il dividendo ed il divisore sono dello stesso genere.*

PRIMO CASO. In questo caso il divisore è, o può considerarsi come un numero astratto, per cui il quoziente deve essere dello stesso genere del dividendo (§. 163), *e la divisione può sempre ridursi a quella di un numero complesso per un numero incomplesso,* come apparirà chiaro dagli esempii.

Per esempio. Una somma di $448^{lire}\ 10^{soldi}\ 3^{denari}$ deve distribuirsi a 24 persone, si domanda quanto spetterà a ciascuno? Qui trattandosi di decomporre il numero proposto in 24 parti eguali, il divisore è realmente un numero astratto, *e la divisione si eseguirà come su i numeri interi, ma a più riprese, formando in ogni resto un nuovo dividendo, con ridurlo in unità della specie seguente ed aggiungervi le unità della stessa specie contenute nel numero proposto, e così continuando sino all'ultima specie.* Ecco l'operazione;

$448^{l}\ .\ 10^{s}\ .\ 3^{d}$	24
208	$18^{l}\ .\ 13^{s}\ .\ 9^{d}\frac{1}{8}$
1.° *resto*........ 16	
20	
320^{s}	
10	
2.° *dividendo*..: 330	
90	
2.° *resto*........ 18	
12	
36	
18	
3	
3.° *dividendo*.. 219^{d}	
ultimo resto...3	

Si sono divise 448^{l} per 24, e si è ottenuto il quoziente 18^{l} ed il resto 16^{l}; con questo resto, moltiplicato per 20 per ridurlo in *soldi*, ed aggiuntivi i 10^{s} contenuti nel numero proposto, si è formato il secondo dividendo 330^{s}, che ha dato per quoziente 13^{s} e per nuovo resto 18^{s}; ridotto in denari questo numero di soldi con moltiplicarlo per 12, ed aggiuntivi 3^{d} del numero proposto, si è ottenuto il terzo dividendo 219^{d}, e da esso l'ultima parte del quoziente $9^{d}\frac{3}{24}$.

§. 179. *Secondo esempio.* Con $1350^{lire}\ 14^{soldi}\ 10^{denari}$ si sono comprate $42^{canne}\ 3^{palmi}\ 4^{once}$ di stoffa, si domanda quanto si è pagato per ogni canna. Cambiando il divisore $32^{c}\ .\ 3^{p}\ .\ 4^{o}$ in numero incomplesso (§. 169)

si avrà $32\frac{5}{12}$, ovvero $\frac{389}{12}$, e l'operazione sarà ridotta a dividere la proposta somma di lire, soldi e denari per la frazione $\frac{389}{12}$, cioè a moltiplicarla per 12 e dividerla per 389 (§. 97). La moltiplicazione si eseguirà con le regole date nel §. 173, e la divisione col metodo usato nell'esempio precedente. Aggiungiamo per maggior chiarezza il calcolo;

1350*lire* 14*soldi* 10*denari*
12
2700
135

per 10 *soldi*............6................($\frac{1}{2}$) *del moltiplicatore*
per 4 *soldi*............2........ 8^s.....($\frac{1}{5}$) *del moltiplicatore*
per 8 *denari*....................8......($\frac{1}{4}$) *del precedente*
per 2 *denari*....................2......($\frac{1}{4}$) *del precedente*

$16208^l . 18^s$ | 389
$41^l . 13^s . 4^d\frac{136}{389}$.

648
1.° *resto*...... 259
20
5180
18
2.° *dividendo* 5198
1308
2.° *resto*...... 141
12
282
141
3.° *dividendo* 1692
ultimo resto.. 136

§. 180. SECONDO CASO. In questo caso il quoziente è in generale un numero astratto, perchè dinota quante volte il divisore è contenuto nel dividendo dello stesso genere, o qual parte è del medesimo. Assolutamente astratto è quando la divisione non ha altro oggetto se non di conoscere appunto la relazione di quantità che esiste fra due numeri dello stesso genere, o come suol dirsi il loro *rapporto*, per esempio quando si volessero paragonare le forze di due eserciti composti uno di 24000 uomini e l'altro di 6000, o le ricchezze di due banchieri, il primo de' quali possedesse un capitale di 50000 ducati e l'altro di 30000; allora la divisione ci farebbe conoscere che il primo esercito è quattro volte più forte del secondo, e che uno de' due banchieri possiede i $\frac{5}{3}$ di ciò che possiede l'altro. Ma può occorrere in altre quistioni che la relazione di quantità fra due numeri dello stesso genere, data dal quoziente della divisione di uno per l'altro, debba essere espressa da un numero concreto e complesso, siccome apparirà da' seguenti esempii; in qualunque ipotesi però, sempre che il divisore è dello stesso genere del dividendo, il quoziente dovrà essere di genere diverso (§. 163), per cui l'operazione non potrà ridursi come nel caso precedente alla divisione di un numero complesso per un incomplesso, poichè quando un numero complesso si divide per un

incomplesso non si fa se non che prenderne una data parte, e quindi il quoziente deve ritenere le forme del dividendo. *La divisione* dunque *dovrà eseguirsi riducendo i due numeri complessi ad incomplessi, ed esprimendo il quoziente in forma di numero astratto o di numero complesso, come esige la quistione che ha dato motivo al calcolo.*

Primo esempio. Sapendosi che la canna di un certo lavoro costa $34^{lire}\ 12^{soldi}\ 3^{denari}$, si domanda quante canne di un tal lavoro potranno farsi eseguire con $1528^{lire}\ 14^{soldi}\ 6^{denari}$? Il numero di canne domandato si otterrà cercando quante volte il costo di una canna è contenuto nella somma di denaro di cui si vuol disporre, ma per eseguire la divisione bisognerà dare ai due proposti numeri la forma di numeri incomplessi (§. 169) e cavarne il quoziente espresso in canne e parti di canna, come segue;

$$1528^l\ .\ 14^s\ .\ \cdot^d \qquad\qquad 34^l\ .\ 12^s\ .\ 3^d$$

$$1528\tfrac{29}{40}\quad 14\tfrac{1}{2} \qquad\qquad 34\tfrac{49}{80}\quad 12\tfrac{1}{4}$$

$$61120\quad \overline{29}\,/\,2 \qquad\qquad 2720\quad \overline{49}\,/\,4$$

$$\underline{\ \ \ 29}\qquad\qquad\qquad \underline{\ \ \ 49}$$

$$\frac{61149}{40} \qquad\qquad \frac{2769}{80}$$

$$\frac{61149}{40} : \frac{2769}{80} = \frac{122298}{80} : \frac{2769}{80} = \frac{122298}{2769}$$

```
122298canne |2769
 11538      |44c . 1p . 4o . 0m 80/923
   462
     8
 -----
  3696palmi
   927
    12
  ----
  1854
   927
  ----
  11124once
     48
      5
  ----
   240minuti
```

In questa operazione dopo aver cambiati i proposti due numeri complessi nelle frazioni $\frac{61149}{40}$, $\frac{2769}{80}$, si è ridotta la prima al denominatore della seconda per rendere più semplice la divisione, la quale per due frazioni che hanno lo stesso denominatore si esegue soltanto su i numeratori (§. 100); ed è facile persuadersi che nel caso attuale, in cui si tratta di dividere uno per l'altro due numeri complessi del medesimo genere, la riduzione delle due frazioni allo stesso denominatore è sempre semplicissima.

Ma la divisione di un numero complesso per un altro dello stesso genere si esegue spesso più facilmente *riducendo i due numeri dati in unità*

dell' ultima specie, come nella prima maniera di ridurre i numeri complessi ad incomplessi (§. 168), *e dividendoli uno per l' altro con esprimere il quoziente in forma di numero astratto o di numero complesso, a norma della quistione che ha doto motivo al calcolo.* Eccone un esempio.

§. 181. *Secondo esempio.* Si sono comprate $3^{canne}\ 4^{palmi}\ 3^{once}$ di una certa stoffa per *una* lira; si domanda per comprare $75^{canne}\ 6^{palmi}\ 6^{once}$ della medesima stoffa quanto si dovrà sborsare? È chiaro che la somma cercata si otterrà dividendo $75^c.\ 6^p.\ 6^o.$ per $3^c.\ 4^p.\ 3^o$, ed esprimendo il quoziente in lire, soldi e denari, poichè quante volte $75^c.\ 6^p.\ 6^o$ contengono $3^c.\ 4^p.\ 3^o$, che importano una lira, altrettante lire si dovranno sborsare. L' andamento dell' operazione sarà come segue.

	$75^c\ .\ 6^p\ .\ 6^o$	$3^c\ .\ 4^p\ .\ 3^o$
	8	8
	600	24
	6	4
	606	28
	12	12
	1212	56
	606	28
	6	3
dividendo...	7278	339 *divisore*
	498	$21^l\ .\ 9^s\ .\ 4^d.\frac{192}{339}.$
	159^l	
	20	
	3180^s	
	129	
	12	
	258	
	129	
	1548^d	
	192	

I due numeri proposti si sono ridotti a 7278 *once* e 339 *once*, e la divisione si è eseguita su questi numeri esprimendo il quoziente in lire, soldi e denari; perocchè i proposti due numeri complessi equivalgono alle frazioni di canna $\frac{7278}{96}$, $\frac{339}{96}$, le quali avendo lo stesso denominatore si dividono una per l'altra dividendo i soli numeratori. Ma nell' usare questo metodo, bisogna badar bene che l' ultima specie alla quale si riducono i due numeri complessi sia la stessa per entrambi, affinchè i denominatori, non espressi ma sottintesi nella divisione, siano eguali: per esempio dovendo dividere $4^c.\ 3^p\frac{1}{5}$ per $2^c.\ 2^p.\ 3^o\frac{1}{2}$, si ridurrà il dividendo in palmi e si avrà $35\frac{1}{5}$, e questo numero di palmi si ridurrà anche in once moltiplicandolo per 12, perchè il divisore contiene once; i due numeri incomplessi su i quali dovrà eseguirsi la divisione saranno dunque $422\frac{2}{5}$, $219\frac{1}{2}$.

SEZIONE SECONDA

Teorica delle ragioni e delle proporzioni e sue applicazioni.

CAPO I.

TEORICA GENERALE DELLE RAGIONI E PROPORZIONI.

Della ragione in generale.

§. 182. Due grandezze qualunque dello stesso genere possono paragonarsi fra loro in due diversi modi; 1.° *osservando di quanto una supera l'altra*, 2.° *osservando quante volte una è contenuta nell' altra*, o più generalmente, *che parte una è dell'altra*. Per esempio, due amici paragonano il denaro che hanno in tasca: uno ha 6 ducati, e l'altro ne ha 2; quello che ha 6 ducati può dire all' altro che ne ha 2, *io ho quattro ducati più di te*, e può dire ancora, *il mio denaro è triplo del tuo*; reciprocamente quello che ha 2 ducati può dire all' altro, *io ho quattro ducati meno di te*, oppure, *il mio denaro è terza parte del tuo*. Se i due numeri fossero 5 e 3, paragonando il maggiore al minore potrebbe dirsi, o che lo supera di due unità, o che è *cinque terzi* di esso; e viceversa, paragonando il minore al maggiore si direbbe, o che gli è inferiore per due unità, o che è *tre quinti* di esso. Il primo modo di paragone ci dà idea del *rapporto o ragione aritmetica*, ed il secondo, *del rapporto o ragione geometrica*; ma qualunque sia la maniera di paragonar le quantità, è chiaro che il paragone non potrà farsi se esse non sono dello stesso genere, o sia *omogenee*; nè si potrà stabilire alcun rapporto fra le grandezze *eterogenee*, vale a dire di genere diverso.

Rapporto o ragione aritmetica di due quantità dello stesso genere è dunque *la loro differenza; e rapporto o ragione geometrica di due quantità dello stesso genere è il quoziente della divisione di una per l' altra, o altrimenti, la frazione vera o spuria che ha per termini quelle quantità.*

Occupandoci, per ora, de' soli rapporti geometrici, ricorderemo che essi sono *sempre numeri astratti*, (§§. 163, 180), e quindi indipendenti dalla natura o qualità delle grandezze che si paragonano; così il numero 3 serve egualmente ad indicare il rapporto di 6 *ducati* e 2 *ducati*, e quello di 12 *rotoli* e 4 *rotoli* della stessa merce.

Un rapporto geometrico si scrive separando con due punti le quantità

che lo compongono; per esempio il rapporto de' numeri 6 e 2 si scrive, 6: 2, e si legge 6 *sta a* 2, o pure 6 *a* 2. Le quantità che si paragonano diconsi *termini* del rapporto, ed il primo termine si chiama *antecedente*, il secondo *conseguente*; nella ragione di 6:2 l'antecedente è 6 ed il conseguente è 2.

Se uno dei termini del rapporto è l'unità, l'altro termine, considerato come numero astratto, equivale a quel medesimo rapporto (§. 47); e però si potrebbe dire che *un numero astratto qualunque rappresenta il rapporto di una qualsivoglia grandezza ad un' altra dello stesso genere presa per unità* (*). Segue da ciò, che un numero *concreto* può esprimersi col prodotto del corrispondente numero *astratto* per l'unità *concreta* cui si riferisce; così 15 *canne* si può scrivere 15×1^{canna}.

§. 183. *Una ragione geometrica non cambia di valore se si moltiplicano o si dividono i suoi termini per la stessa quantità.*

Questa proposizione è evidente, perchè una ragione geometrica equivale ad una frazione, e si sa che il valore di una frazione rimane inalterato se i termini di essa si moltiplicano o si dividono per un medesimo numero (§§. 62, 63). Così la ragione di 8.6 è la stessa di quella di 24:18, o dell'altra di 4:3; il che suole anche enunciarsi diversamente, dicendo che *due quantità qualunque omogenee hanno fra loro lo stesso rapporto delle loro parti simili* (cioè delle loro metà, delle loro terze parti etc.); *come pure de' loro multipli*, cioè dei loro doppii, dei loro tripli etc.

Una conseguenza importante del medesimo principio è che *un rapporto di due numeri combinati con frazioni in qualsivoglia modo, può sempre ridursi al rapporto di due numeri interi*. In fatti, se si abbia il rapporto di un intero ad una frazione, come $3:\frac{2}{5}$, si ridurrà l'intero ad una frazione dello stesso denominatore della frazione proposta, e si avrà, $\frac{15}{5}:\frac{2}{5}$, indi si moltiplicheranno i termini del rapporto pel denominatore comune, e si otterrà una ragione fra due numeri interi equivalente alla prima, cioè 15:2. Se il rapporto fosse di una frazione ad una frazione, o ad un intero e frazione, è chiaro che si potrebbe sempre ridurre a quello di due frazioni aventi lo stesso denominatore, e quindi al rapporto di due

(*) Nell' *Aritmetica universale* di *Newton* si legge: *per* NUMERUM *non tam multitudinem unitatum quam* ABSTRACTAM *quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus*. Con questa dichiarazione il sommo geometra volle avvertire che nelle scienze matematiche la parola *numero* si usa quasi sempre per dinotare il *numero astratto*, ma non intese già di condannare la definizione generale del numero, *multitudo unitatum*. Chi volesse, come definizione del numero, adottare il significato più speciale che gli attribuisce *Newton*, andrebbe incontro a molti inconvenienti; 1.° una siffatta definizione sarebbe inintelligibile per i giovanetti all'entrata della scienza; 2.° non si farebbe la necessaria distinzione fra numero *astratto* e numero *concreto*; 3.° la definizione non sarebbe generale, poichè, secondo quel concetto, non potrebbe chiamarsi numero una moltitudine di cose simili, sebbene disuguali, i rapporti della quale a ciascuna di quelle cose presa per unità sarebbero diversi. Non si potrebbero perciò numerare gli uomini, le stelle, i pianeti etc., e gravissimo sarebbe, per esempio, l'errore di chi dicesse che i *pianeti conosciuti sino a tutto l' anno 1848 sono diciassette*, perchè prendendo per unità il massimo *Giove*, o la meschinissima *Meti*, la quantità di quel numero sarebbe nel primo caso migliaia di volte più piccola che nel secondo.

numeri interi. Per esempio il rapporto di $\frac{3}{7}:2\frac{1}{3}$ si cambia nell'altro di $\frac{3}{7}:\frac{7}{3}$, o di $\frac{9}{21}:\frac{49}{21}$, o in fine di 9:49. Da ciò risulta ancora che, *il rapporto di due frazioni che hanno lo stesso denominatore è eguale a quello de' loro numeratori.*

§. 184. Il rapporto di due quantità, essendo un numero astratto indicante che parte una è dell' altra, serve anche a mostrare come la maggiore potrebbe comporsi per mezzo della minore. Per esempio il rapporto de' numeri 12 ed 8 è $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$, e significa che 12 è *tre mezzi di* 8; quindi per comporre il 12 per mezzo dell' 8, bisogna aggiungere ad 8 la sua metà. Similmente il rapporto de' numeri 16 e 6 è $\frac{16}{6}=2\frac{2}{3}$, e questo numero dimostra che il 16 si compone prendendo due volte il 6, e due volte la sua terza parte e formandone un sol tutto, cioè $16=6+6+\frac{6}{3}+\frac{6}{3}$. Sotto questo aspetto, si chiama alcune volte *quantità di ragione o esponente di ragione*, il quoziente della ragione, o pure la ragione stessa espressa sotto forma di frazione e ridotta ai suoi minimi termini. E poichè *misurare* una quantità significa comporla, o valutarla per mezzo di un' altra quantità più piccola dello stesso genere presa per unità (*), nel rapporto di due grandezze la maggiore può considerarsi *misurata* per mezzo della minore.

Del rapporto commensurabile.

§. 185. Il rapporto di due grandezze dicesi *commensurabile* sempre che vien espresso da un numero intero o da un numero frazionario; perchè allora la grandezza maggiore può sempre misurarsi esattamente per mezzo della minore o di una parte *aliquota* (§. 173) di essa. Così, nel rapporto dei numeri 12 e 4, il 12 si misura considerandolo come l' unione o l' aggregato di *tre* numeri eguali a 4; e nel rapporto dei numeri 12 e 9, il 12 si misura considerandolo come l' aggregato di *quattro* numeri eguali a 3, *terza parte* di 9. In questo secondo esempio il numero 3 misura anche il 9, che lo contiene esattamente tre volte, e però dicesi *comune misura* de' numeri 12 e 9. Se i due numeri fossero 3 e $\frac{2}{5}$, la loro *comune misura* sarebbe $\frac{1}{5}$, che è contenuto *due* volte nel $\frac{2}{5}$ e *quindici* volte nel 3. Un rapporto di due grandezze è quindi *commensurabile* quando la minore è contenuta esattamente nella maggiore, o quando si può trovare una grandezza più piccola della minore che sia contenuta esattamente in entrambe; o altrimenti, un rapporto di due grandezze è *commensurabile* quando esse possono avere una *comune misura*, che in alcuni casi è la grandezza minore, ed in altri è una quantità più piccola.

§. 186. È chiaro poi che in generale quando un rapporto è commensurabile, se ne potrà sempre determinare con esattezza il valore. In fatti se due numeri, o generalmente due quantità N,n, hanno una comune misura m, questa dovrà esser contenuta un esatto numero di volte tanto in N che in n; e quindi supponendo che la quantità maggiore la contenga 15 volte, e la minore 2 volte, la prima risulterà dal prodotto di m per 15 e la seconda da quello di m per 2 (§. 35). Laonde il rapporto delle quantità N,n si cambierà in quello de' prodotti $m\times15$, $m\times2$, e dividendo per m i termini della ragione $m\times15:m\times2$, il rapporto delle grandezze N,n verrà rappresentato dal rapporto de' numeri 15 e 2, siccome si è veduto di sopra pe' numeri 3 e $\frac{2}{5}$, che avevano per comune misura $\frac{1}{5}$.

§. 187. La precedente osservazione ci addita il modo di ridurre un rapporto di due quantità qualunque N,n a quello di due numeri interi cercando la comune mi-

(*) Quando si dice che una quantità di grano è 20 *tomoli*, o una quantità d' olio è 5 *salme*, s' intende che la data massa di grano e 20 volte il grano di cui è capace la misura detta *tomolo*, e il dato volume d' olio è 5 volte l' olio contenuto nella *salma*.

sura *m* fra le quantità proposte; e per ottenere anche la *più semplice espressione* di un tal rapporto, sarà utile cercare la *massima* comune misura fra quelle quantità, perchè quanto più grande sarà la comune misura *m* che entra come fattore nei termini della frazione esprimente il rapporto, più semplice risulterà la frazione medesima sopprimendo quel fattore. Nel §. 74 si è data la regola per trovare il *massimo comune divisore* fra due numeri, la quale consiste nel dividere il numero maggiore per il minore, indi il minore pel resto della divisione, poi il primo resto per il secondo, e così di seguito, sino ad ottenere una divisione senza resto, il divisore della quale è il massimo comune divisore richiesto. Se però le due quantità di cui si cerca la massima comune misura non fossero numeri, e si dovesse per esempio trovare il rapporto, e quindi la massima comune misura, fra due lunghezze date, allora l'operazione non potrebbe procedere come pe' numeri, ma sarebbe facile sostituire la sottrazione ripetuta a ciascuna divisione voluta dalla regola (§. 36). Si toglierà dunque la lunghezza minore dalla maggiore tante volte quante sarà possibile, indi si toglierà anche ripetutamente il resto dalla lunghezza minore, poi si farà lo stesso col secondo resto rispetto al primo, e così andando avanti, sino a che togliendo ripetutamente un ultimo resto dal precedente non vi sia più resto alcuno. Sarà facile calcolare quante volte l'ultimo resto, ossia la massima comune misura, è contenuta nella lunghezza minore e quante volte nella maggiore, e così queste lunghezze potranno essere rappresentate da due numeri interi esprimenti ciascuno un aggregato di unità eguale alla lunghezza indicante la massima comune misura; quindi al rapporto delle due lunghezze proposte potrà sostituirsi quello de' due numeri così ottenuti.

Per esempio la lunghezza minore sia contenuta 3 volte nella maggiore con un resto, e questo resto 4 volte nella minore con un secondo resto, ed il secondo resto 2 volte nel primo esattamente; il secondo resto sarà la massima comune misura. E poichè il primo resto è doppio del secondo, la lunghezza minore, che si compone del quadruplo del primo resto e del secondo resto, conterrà *nove* volte il secondo resto, o la massima comune misura; e la lunghezza maggiore, che si compone del triplo della minore e del primo resto, conterrà *ventinove* volte la massima comune misura, onde il rapporto delle due lunghezze sarà eguale a quello de' numeri 9 e 29.

Analogamente a ciò che si è detto del rapporto commensurabile, un numero qualunque dicesi *commensurabile* allorchè può esser misurato esattamente dalla sua unità, o avere con essa una comune misura. Tutti i numeri interi o frazionarii sono perciò commensurabili; così $7\frac{3}{4}$ non è misurato esattamente dall'unità, ma dalla frazione $\frac{1}{4}$, che essendo contenuta *trentuno* volte in $7\frac{3}{4}$, e *quattro* volte in 1, può considerarsi come loro comune misura. I numeri interi o frazionarii diconsi anche *razionali*, perchè si può sempre esattamente assegnare il rapporto o la *ragione* che serbano all'unità; nell'esempio precedente il rapporto di $7\frac{3}{4}$ all'unità è quello di $\frac{31}{4}:\frac{4}{4}$, ossia di 31:4 (§. 183).

Del rapporto incommensurabile.

§. 188. Le radici quadrate o cubiche de' numeri, che non sono quadrati o cubi perfetti, non hanno mai un rapporto esatto coll'unità, poichè si è veduto (§. 145) che esse non possono esprimersi nè per mezzo di numeri interi, nè per mezzo di numeri frazionarii, ma debbono considerarsi come decimali a periodo infinito. Per questa ragione quelle quantità si sono chiamate *irrazionali*, cioè mancanti di *ragione* esatta con l'unità, e diconsi anche *incommensurabili* perchè non si possono esattamente misurare nè per mezzo dell'unità nè per mezzo di una sua parte comunque si voglia piccola. Allo stesso modo, un rapporto si chiama *incommensurabile* o *irrazionale* quando non esiste una esatta comune misura fra i suoi termini, ossia quando non può assegnarsi il valore di esso esattamente; per esempio il rapporto di $\sqrt{2}:3$ è incommensurabile, perchè estraendo la radice quadrata dal 2 si cambia in 1,4142136....:3, e la frazione decimale, non terminando mai, dà origine ad infiniti rapporti diversi, secondo che se ne prende un maggior numero di cifre. Così, spezzandola dopo tre cifre, il rapporto sarà 1,414:3, ovvero $\frac{1414}{1000}$:3, equivalente al rapporto de' numeri interi 1414 e 3000; spezzandola alla quinta cifra il rapporto sarà quello de' nume-

ri 141421: 300000 etc. Ma quantunque non possa assegnarsi il valore esatto del rapporto $\sqrt{2}:3$, sarà in nostro arbitrio di approssimarci ad esso quanto vorremo, prendendo sempre un maggior numero di cifre decimali, sino a che l'errore divenga piccolissimo ed assolutamente trascurabile. Si prendano sei cifre decimali, ed il rapporto sarà espresso dalla frazione $\frac{1414214}{3000000}$; se ne prendano sette ed il rapporto sarà $\frac{14142136}{30000000}$ che non differisce dal precedente se non per $\frac{4}{30000000}$, e questa differenza già piccolissima diminuirebbe anche più adottando un numero più grande di cifre decimali. Il rapporto $\sqrt{2}:3$, ovvero la frazione $\frac{\sqrt{2}}{3}$, è dunque un *limite* (§. 120) al quale continuamente si accostano, senza raggiungerlo mai, tutti i moltiplici e successivi rapporti che possono formarsi col decimale a periodo infinito 1,4142.... e col numero 3.

§. 189. Da quanto precede apparisce chiaramente che il fatto di non potersi assegnare il preciso valore di un rapporto incommensurabile non cambia la natura di un tal rapporto, il quale dovrà sempre considerarsi come il quoziente di una divisione, con la differenza che per le quantità irrazionali, esso non si potrà ottenere esattamente ma con un' approssimazione indefinita, non dissimile nell' uso dalla esattezza. In conferma di questa verità osserveremo che se si rappresenti un rapporto incommensurabile per mezzo di una frazione ordinaria i cui termini siano indefiniti, come $\frac{14142136\cdots}{30000000\cdots}$, dividendo il numeratore ed il denominatore di essa per il numeratore si avrà l'espressione equivalente $\frac{1}{2+\frac{1715728\cdots}{14142136\cdots}}$, e dividendo i termini della nuova frazione $\frac{1715728\cdots}{14142136\cdots}$ per il suo numeratore, si otterrà

$$\frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{416312\cdots}{1715728\cdots}}}$$

e così continuando indefinitamente, il rapporto incommensurabile si cambierà nella frazione continua di un numero infinito di termini,

$$\frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{1}{4+\frac{1}{8+\frac{1}{4+\text{etc.}}}}}}$$

dalla quale, prendendo successivamente uno, due, tre e più termini, si dedurrà una serie di frazioni ordinarie

$$\frac{1}{2},\ \frac{8}{17},\ \frac{33}{70},\ \frac{272}{577}$$

che si approssimeranno gradatamente nel loro valore al rapporto incommensurabile proposto (§. 76), senza poterlo mai raggiungere. Or l' operazione che ha servito a mutar questo rapporto in una frazione continua è la stessa proposta di sopra (§. 187) per ridurre un rapporto commensurabile di due quantità qualunque a quello di due numeri interi, poichè l'una e l'altra consistono nella ricerca della massima comune misura fra i termini del rapporto (§. 78). Dunque il modo di valutare in numeri il rapporto commensurabile o incommensurabile che serbano l' una all' altra due quantità qualunque è unicamente, di *sottrarre la grandezza minore dalla maggiore quante volte è possibile, ed essendovi un resto, sottrarlo quante volte si può dalla grandezza minore, indi togliere anche ripetutamente il secondo resto, se ve n'è, dal primo, e poi il terzo dal secondo e così di seguito; se le due grandezze proposte saranno fra loro commensurabili, l' operazione avrà un termine, e coi numeri esprimenti, nelle ripetute sottrazioni, quante volte le quantità minori erano contenute nelle maggiori, si potrà formare una frazione continua, che ridotta a frazione ordinaria darà il rapporto numerico cercato, se le due grandezze saranno fra loro*

incommensurabili l' operazione progredirà all' infinito, cioè la frazione continua avrà un numero infinito di termini, e se ne potrà dedurre una serie di frazioni, il cui valore andrà man mano accostandosi al rapporto numerico richiesto sino a differirne di una quantità piccolissima ed assolutamente trascurabile.

Della proporzione in generale.

§. 190. Quando il rapporto di due quantità è lo stesso di quello di due altre, le quattro quantità diconsi in *proporzione*, e quindi *per proporzione s' intende l' eguaglianza di due rapporti*. Una proporzione si scrive così, 6:2::12:4, e si legge, 6 *sta a* 2 *come* 12 *sta a* 4; essa, contenendo due ragioni, è composta di quattro termini, cioè di due *antecedenti* e di due *conseguenti*. Il primo ed il quarto termine si chiamano termini *estremi*, e gli altri due diconsi termini *medii*. Una proporzione che ha i termini medii eguali fra loro prende il nome di *proporzione continua*, o si scrive più brevemente così, ∺9:3:1.

Ogni rapporto potendo esser rappresentato da una frazione, *l' eguaglianza di due rapporti, cioè la proporzione, corrisponde all' eguaglianza di due frazioni*. E siccome il rapporto di due quantità è un numero astratto, mentre è indispensabile che i termini di una medesima ragione siano quantità *omogenee*, non è necessario che lo siano tutti quattro i termini di una proporzione, ma i termini della prima ragione potranno essere *eterogenei* a quelli della seconda, perchè l' eguaglianza di due ragioni è sempre l' eguaglianza di due numeri astratti. È chiaro poi che l' ordine di grandezza de' termini della prima ragione dovrà esser lo stesso di quello dei termini della seconda ragione, cioè *se il primo termine della proporzione è minore, eguale o maggiore del secondo, la stessa relazione dovrà sussistere fra il terzo ed il quarto termine.*

Poichè il rapporto di due quantità esprime il modo di comporre una di esse per mezzo dell' altra (§. 184), in una proporzione qualunque il primo termine dovrà comporsi per mezzo del secondo come il terzo si compone per mezzo del quarto. Sotto questo aspetto la *Moltiplicazione* de' numeri ci ha offerto il primo esempio della proporzione (§§. 26,27), e dal significato di quella operazione si scorge che in generale, *il prodotto* sta *al moltiplicando* come *il moltiplicatore* sta *all' unità*. La divisione, non essendo che una moltiplicazione rovesciata, se ne può anche dedurre, sempre che si voglia, una proporzione, ma è chiaro che l' ordine dei termini cambierà secondo che dovrà figurare da numero astratto il divisore o il quoziente (§. 163).

Una proporzione fra numeri interi o frazionari, quando le ragioni che la compongono sono ridotte alla loro più semplice espressione, si converte in una *identità*. Così la proporzione, $\frac{5}{3}:\frac{4}{2}::\frac{15}{2}:9$, prendendo le *quantità di ragione* de' due rapporti che la compongono, si cambia in $\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$, ovvero in 5:6::5:6.

§. 191. Da ciò che si è detto di sopra delle quantità incommensurabili risulta che una proporzione contenente queste quantità deve pure considerarsi come l'eguaglianza di due quozienti, o sia di due frazioni, quantunque non se ne possano assegnare esattamente i valori; e dal modo di valutare in numeri il rapporto di due grandezze qualunque si può inoltre dedurre un criterio generale per conoscere quando quattro grandezze sono proporzionali. Si eseguiranno sulle prime due grandezze le sottrazio-

ni successive superiormente indicate (§. 189), e le stesse operazioni si faranno sulle altre due; se i risultamenti delle prime operazioni, comunque prolungate, si accorderanno esattamente con quelli delle seconde, le quattro grandezze saranno in proporzione. Il che equivale a dire che, se le frazioni continue terminate o indefinite, ottenute dal paragone delle prime due grandezze fra loro, e delle seconde fra loro, riescono identiche in tutte le loro parti, qualunque estensione si dia a quelle frazioni, le quattro grandezze saranno proporzionali.

Questo criterio, senza mascherare la natura delle quantità irrazionali, mostra la possibilità dell'eguaglianza di due rapporti incommensurabili; perciocchè tali rapporti sono *limiti* di due frazioni continue (§. 189) perfettamente eguali fra loro, quando se ne prende un egual numero di termini, ed inoltre, quelle frazioni, prolungate indefinitamente, si accostano sempre al valore che rappresentano sino a differirne d'una quantità assolutamente trascurabile. Ma qualche volta i rapporti fra quantità incommensurabili sono commensurabili, cioè il quoziente di una quantità irrazionale per un'altra può assegnarsi in numeri interi o frazionari; e ciò conferma maggiormente che quelle quantità non fanno eccezione alla regola generale. Per esempio i rapporti $\sqrt{12}.\sqrt{3}$, e $\sqrt{45}:\sqrt{5}$, posti sotto l'aspetto di frazioni $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$, esprimono le radici quadrate delle frazioni $\frac{12}{3}$ e $\frac{45}{5}$, perchè la radice di una frazione si ottiene estraendola dal numeratore e dal denominatore, e poichè $\frac{12}{3}$ e $\frac{45}{5}$ equivalgono a $\frac{4}{1}$, e $\frac{9}{1}$, i due rapporti si cambiano in $\sqrt{\frac{4}{1}}, \sqrt{\frac{9}{1}}$, ovvero $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$. Dimodochè se si avesse la proporzione

$$\sqrt{12}:\sqrt{3}::2\times\sqrt{45}:3\times\sqrt{5},$$

essa potrebbe ridursi ad una proporzione fra numeri interi: in fatti la prima ragione $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ diviene $\frac{2}{1}$, e la seconda ragione $\frac{2\times\sqrt{45}}{3\times\sqrt{5}}$, equivalente a $\frac{2}{3}\times\sqrt{\frac{45}{5}}$, diviene $\frac{2}{3}\times\frac{3}{1}=\frac{6}{3}$, onde la data proporzione si cambia nell'altra, $2\ 1::6:3$.

Nell'esporre dunque le proprietà generali delle proporzioni geometriche noi prescinderemo da ogni distinzione sulla natura delle quantità che ne formano il soggetto, e quanto sarà dimostrato, servendoci de' numeri come ausiliari del nostro ragionamento, varrà per tutte.

In ogni proporzione geometrica il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' termini medii.

§. 192. Si abbia la proporzione,

$$5:3::15:9;$$

per ciò che si è detto nel §. 180, essa potrà mutarsi nell'eguaglianza di due frazioni, cioè sarà

$$(1)...\frac{5}{3}=\frac{15}{9}.$$

Riduciamo queste frazioni allo stesso denominatore, lasciando indicate le moltiplicazioni col segno $\times$, ed avremo

$$(2)...\frac{5\times9}{3\times9}=\frac{15\times3}{9\times3};$$

queste due frazioni sono eguali ed hanno lo stesso denominatore, e per ciò devono essere eguali anche i loro numeratori. Sarà cioè,

$$5\times9=3\times15.$$

Ma 5 e 9 sono i termini estremi della proporzione, e 3 e 15 sono i termini medii, dunque rimane dimostrata la proprietà fondamentale della teorica delle proporzioni enunciata qui sopra, cioè che *in ogni proporzione geometrica il prodotto degli* estremi, *eguaglia il prodotto de'* medii.

Inversamente, se il prodotto di due quantità eguaglia il prodotto di due altre, le quattro grandezze sono proporzionali, poichè dividendo, per esempio, i due prodotti eguali 5×9, 3×15 per lo stesso prodotto 3×9, si ottiene l' uguaglianza (2), che per l' osservazione del §. 94 si cambia subito nella (1), e quindi nella proporzione $5:3::15:9$. Si avverte però che per disporre in proporzione i quattro fattori contenuti in due prodotti eguali, i fattori di un prodotto dovranno figurare da *estremi*, ed i fattori dell' altro prodotto da *medii*, dimodochè *si scriverà prima uno dei fattori del primo prodotto, poi ambedue i fattori del secondo, ed in ultimo il rimanente fattore del primo prodotto.* Così dall' eguaglianza di due prodotti, $4\times9=12\times3$, si passerà ad una proporzione scrivendo, $4:12::3:9$, o pure; $4:3::12:9$.

Nella proporzione continua, i termini medii essendo eguali, il loro prodotto si potrà considerare come il quadrato di uno di essi, e quindi la proprietà fondamentale si enuncia, per questa specie di proporzioni, come segue: *in una proporzione continua il prodotto de' termini* estremi *eguaglia il quadrato del termine* medio.

§. 193. Quantunque ciò che abbiamo detto di sopra delle quantità incommensurabili potesse bastare a persuaderci, che questa proposizione fondamentale della teorica delle proporzioni sia applicabile anche a quelle quantità; aggiungiamo nondimeno il seguente ragionamento, come un' applicazione de' principii già esposti.

Sia $A:B::C:D$, una proporzione fra quantità incommensurabili; vogliamo dimostrare che il prodotto $A\times D$ dei termini estremi eguaglia il prodotto $B\times C$ dei termini medii. Secondo la definizione generale della ragione data nel §. 189 si cercheranno le frazioni continue corrispondenti alle ragioni $A:B, C:D$, facendo sopra di esse l'operazione che serve a trovare il massimo comune divisore fra due quantità. Essendo eguali per ipotesi le ragioni $A:B$, e $C:D$, le frazioni continue che le esprimono saranno identiche, e da ciascuna di esse si potrà cavare una serie di rapporti commensurabili di più in più approssimati ai rapporti $A:B, C:D$ (§. 76). Indichiamo questi rapporti commensurabili con

$$A':B', A'':B'', A''':B'''\ldots,\ C':D', C'':D'', C''':D'''\ldots,$$

e scegliendo nelle due serie i rapporti nascenti da un egual numero di termini delle frazioni continue, si avranno le proporzioni, o piuttosto le identità seguenti,

$$A':B'::C':D',\ A'':B''::C'':D''\ldots$$

Ora, stando alla prima di queste proporzioni, immaginiamo le quantità proposte B,D, divise in un numero B',D' di parti eguali, e siano m,n i valori di quelle parti; si avrà $B=B'.m$, $D=D'.n$, e quindi la proporzione medesima, moltiplicando i termini della prima ragione per m e quelli della seconda per n, si cambierà in $A'.m:B::C'.n:D$. E poichè le ragioni $A'.m:B$, e $C'.n:D$ differiscono alquanto dalle proposte $A:B$ e $C:D$, che hanno gli stessi conseguenti B,D, bisognerà ancora che gli antecedenti $A'.m, C'.n$, differiscano dagli antecedenti A,C; e chiamando p,q le differenze, si avrà $A=A'.m+p$, $C=C'.n+q$. Sostituiscansi questi valori nella proporzione proposta, $A:B::C:D$, e si avrà l'equivalente, $A'.m+p:B::C'.n+q:D$; nella quale il prodotto degli estremi sarà $A'.m.D+p.D$, e quello de' medii, $B.C'.n+B.q$ (§. 68). Ma i prodotti, $A'.m.D$, e $B.C'.n$ ovvero $A'.m.D'.n$, $B'.m.C'.n$ sono eguali, perchè i quattro numeri commensurabili A',B',C',D', sono in proporzione; dunque se i pro-

dotti, $A'.m.D+p.D$, $C'.n.B+B.q$, o gli equivalenti $A.D$, $B.C$, non sono eguali, differiranno fra loro della differenza medesima delle quantità $p.D$, $B.q$, cioè sarà

$$(1) \ldots A.D-B.C=p.D-q.B.$$

Applicando lo stesso ragionamento alla seconda proporzione $A'':B''::C'':D''$, si avrà

$$A=A''.m'+p',\ C=C''.n'+q'.$$

e quindi

$$A''.m'+p':B::C''.n'+q':D,$$

da cui si caverà

$$(2) \ldots A.D-B.C=p'.D-q'.B;$$

e così pure si avrà dalla terza proporzione

$$(3) \ldots A.D-B.C=p''.D-q''.B \text{ etc.}$$

Ciò posto, è noto (§. 78) che gli errori dei rapporti $A':B'$, $A'':B''$... e $C':D'$, $C'':D''$.. dati dalle frazioni continue, in paragone de' rapporti incommensurabili proposti $A:B$, $C:D$, debbono andar sempre diminuendo; e lo stesso dovendo verificarsi de' rapporti equivalenti $A'.m:B$, $A''.m':B$...$C'.n:D$, $C''.n:D$, che hanno con le ragioni $A:B$, $C:D$, gli stessi conseguenti, ne segue che dovranno audar diminuendo ancora le differenze fra gli antecedenti di tali rapporti e le quantità, A, C, cioè dovrà essere $p'<p$, $p''<p'$...$q'<q$, $q''<q'$..., e per conseguenza $p'.D<p.D$, $p''.D<p'.D$..$q'.B<q.B$, $q''.B<q'.B$... Ma nella serie infinita de' rapporti commensurabili dati dalla frazione continua, le quantità p, p', p''...q, q', q'', e quindi i prodotti $p.D$, $p'.D$...$q.B$, $q'.B$... possono, diminuendo progressivamente, divenire minori di qualunque quantità assegnabile; dunque anche le differenze di essi prodotti $p.D-q.B$, $p'.D-q'.B$... possono divenire infinitesime. Laonde, in forza delle uguaglianze (1), (2), (3)..., se si nega che i due prodotti $A.D$, $B.C$ sono eguali fra loro, la loro differenza non sarà costante, ed anderà in vece diminuendo sempre sino a divenire minore di qualunque quantità assegnabile; il che è assurdo perchè le quantità A, D, B, C costanti e determinate, non possono ammettere ne' loro prodotti che una differenza costante. Rimane dunque dimostrato che *in una proporzione qualunque $A:B::C:D$ fra quantità incommensurabili il prodotto de' termini estremi eguaglia quello de' termini medii.*

§. 194. Affinchè il precedente ragionamento non apparisca troppo astratto, mostriamo con un esempio il progresso della diminuzione delle quantità p, p'...; q, q'...., e quindi l'assurda variabilità della differenza de' prodotti $A.D$, $B.C$, nel caso che si neghi la loro uguaglianza. Sia proposta la proporzione $\sqrt{3}:\sqrt{2}::\sqrt{15}:\sqrt{10}$, la quale, eseguendo le estrazioni di radice, e fermandosi alla settima cifra decimale diviene, 1,7320508:1,4142136::3,8729833:3,1622777. Si cerchi il massimo comune divisore fra i termini della prima o della seconda ragione, siccome nei §§. 78, 180, e dall' operazione prolungata sino al settimo quoziente, si dedurrà la frazione continua equivalente a ciascuna delle due ragioni; cioè sarà

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2 \text{ etc.}}}}}}}$$

Valutando successivamente uno, due, o più termini di tal frazione, si otterranno le frazioni ordinarie, ossiano i rapporti commensurabili sempre più approssimati alle ragioni proposte, come si veggono nella serie qui appresso,

5:4, 11:9, 49:40, 109:89, 485:396, 1079:881, etc.

Dividiamo ora i conseguenti 1,4142136, e 3,1622777 delle proposte ragioni incommensurabili prima per 9, poi per 89, indi per 881, che sono i conseguenti della seconda, quarta e sesta ragione della serie precedente, le quali sono tutte minori delle ragioni incommensurabili (§. 78); ed avremo i quozienti

0,15713484; 0,015890040, 0,0016052368

0,35136419, 0,035531210, 0,0035894185

Moltiplicando i termini delle tre menzionate ragioni per questi quozienti, si otterranno altrettante ragioni equivalenti, le quali avranno per conseguenti gli stessi numeri 1,4142136, 3,1622777, e formeranno tre proporzioni di cui le ragioni saranno rispettivamente eguali alle tre commensurabili, 11:9,109:89,1079:881; sarà cioè,

$$
\begin{array}{c}
1,7284832:1,4142136::3,8650061:3,1622777 \\
1,7320144:1,4142136::3,8729019:3,1622777 \\
1,7320505:1,4142136::3,8729826:3,1622777
\end{array}
$$

Queste proporzioni dovendo considerarsi fra quantità commensurabili, perchè le incommensurabili entrano in tutti i termini di esse come fattori, i prodotti de' termini estremi e quelli de' termini medii daranno le uguaglianze,

$$
(a)\ldots\left\{\begin{array}{l}
1,7284832\times3,1622777=1,4142136\times3,8650061 \\
1,7320144\times3,1622777=1,4142136\times3,8729019 \\
1,7320505\times3,1622777=1,4142136\times3,8729826
\end{array}\right.
$$

Intanto la proporzione proposta, paragonata alle tre precedenti potrà prendere i seguenti aspetti;

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{1,7284832+0,0035676}^{\sqrt{3}}:\overbrace{1,4142136}^{\sqrt{2}}::\overbrace{3,8650061+0,0079772}^{\sqrt{15}}:\overbrace{3,1622777}^{\sqrt{10}} \\
1,7320144+0,0000364:1,4142136::3,8729019+0,0000814:3,1622777 \\
1,7320505+0,0000003:1,4142136:\,3,8729826+0,0000007:3,1622777
\end{array}
$$

Facendo in ciascuna proporzione il prodotto de' termini estremi e quello de' termini medii, e prendendo le differenze, esse in forza delle eguaglianze (a), saranno così espresse,

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{3}\times\sqrt{10}-\sqrt{2}\times\sqrt{15}=0,0035676\times\sqrt{10}-0,0079772\times\sqrt{2} \\
\sqrt{3}\times\sqrt{10}-\sqrt{2}\times\sqrt{15}=0,0000364\times\sqrt{10}-0,0000814\times\sqrt{2} \\
\sqrt{3}\times\sqrt{10}-\sqrt{2}\times\sqrt{15}=0,0000003\times\sqrt{10}-0,0000007\times\sqrt{2}
\end{array}
$$

Se dunque esistesse differenza fra il prodotto de' termini estremi e quello de' termini medii della proposta proporzione, una tal differenza non potrebbe rimanere costante, perchè i numeri che qui sopra moltiplicano $\sqrt{10}$ e $\sqrt{2}$, diminuiscono col progresso delle operazioni sino a divenire minori di qualunque quantità assegnabile, e però le prime differenze fra quantità finite non potrebbero uguagliare quelle che in seguito si verificano fra quantità indefinitamente piccole. In un sol modo quelle differenze potrebbero essere tutte eguali fra loro, cioè quando fossero tutte nulle, come lo sono nel fatto e potrebbe verificarsi spingendo molto oltre l'approssimazione del calcolo; ed allora il prodotto degli estremi nella proporzione proposta uguaglierà quello de' medii; il che si voleva dimostrare.

§. 195. Le considerazioni esposte di sopra intorno alla ragione ed alla proporzione fra quantità incommensurabili, sono il risultamento delle meditazioni di sommi matematici su questo arduo soggetto. Il celebre libro V degli elementi di Euclide, nel quale questo grande geometra espose la teorica generale delle proporzioni, è stato specialmente il campo delle discussioni dei geometri moderni. Dalle cose già dette è manifesto, che l'obbligo che si avevano imposto gli antichi di evitare negli elementi qualunque considerazione dell'infinito, rendeva impossibile il trattare con chiarezza e precisione il caso della incommensurabilità. Euclido volendo includerlo nella definizione della ragione, senza esaminarlo seciamente e di proposito, rese vaga ed insignificante quella definizione, a giudizio di profondi pensatori. E se col principio degli egualmente moltiplici diede un criterio esatto per conoscere la proporzionalità di quattro grandezze, fu quello un teorema difficile a dimostarsi, piuttosto che un assioma, o una definizione; e ciò che più rileva, un tal carattere dell'uguaglianza di due ragioni, era affatto indipendente dalla definizione della ragione; dimodochè molti geometri opinarono esserè quest' ultima interamente inutile nell'ordine dei principii euclidei. Ma ognun vede (come diceva benissimo un appassionato euclidista) che dare il bando alla definizione della ragione sarebbe lo stesso che *pretendere di potersi conoscere a priori le proprietà di un soggetto, senza prima conoscerne la natura.* Sono queste le oscurità e le incongruenze che i più grandi geometri hanno ravvisate ne' fondamenti della teorica euclidea,* la quale deve al-

trovde riguardarsi come un capolavoro nel suo genere, per l'epoca in cui fu scritta, ed avendo riguardo all'imperfetto stato in cui si trovava l'Aritmetica. Per dare esatta idea della ragione, e porre d'accordo la nozione di essa con quella della proporzione, era indispensabile discutere ed esaminare apertamente la natura delle quantità incommensurabili, come hanno fatto i moderni; perocchè una frase generica, ed un aggettivo di più o di meno, siccome quello aggiunto o tolto, secondo le varie opinioni, alla definizione euclidea della ragione, non sono fondamenti di scienza (*).

Cambiamenti di luogo che possono farsi ne' termini di una proporzione.

§. 196. La proprietà dimostrata qui sopra può servire di criterio per assicurarsi se quattro numeri sono in proporzione, e basterà a quest'oggetto osservare se il prodotto de' termini estremi eguaglia quello de' termini medii. Così i quattro numeri 3, 5, 6, 10 sono in proporzione, perchè il prodotto 3×10 de' termini estremi, eguaglia l'altro 5×6 de' termini medii.

In conseguenza di ciò una proporzione qualunque 3:5::6:10 continuerà a sussistere, malgrado che si cambi in molte maniere il luogo dei suoi termini, purchè i cambiamenti siano tali che si conservi sempre il prodotto degli estremi eguale a quello de' medii. I cambiamenti che possono operarsi sono i seguenti,

3: 6: : 5:10
5: 3: :10: 6
5:10: : 3: 6
10: 5: : 6: 3
10: 6: : 5: 3
6:10: : 3: 5
6: 3: :10: 5

Tutte queste proporzioni sono esatte, poichè in esse i termini estremi si sono mantenuti sempre insieme nei luoghi estremi o ne' luoghi medii, e così pure i termini medii. Ma se si scrivesse

6:3: : 5 : 10,

questa disposizione di termini sarebbe erronea, perchè 6×10 non è eguale a 3×5.

Fra i varii cambiamenti che possono aver luogo, quello che dà origine alla prima delle sette precedenti proporzioni cioè, 3:6::5:10 , consiste nell'alterare il luogo de' termini medii nella proporzione primitiva 3:5::6:10, e si chiama *permutare* la proporzione; e l'altro cambiamento che dà origine alla seconda proporzione, 5:3::10:6, consiste nel porre gli antecedenti in luogo dei conseguenti , e viceversa , e dicesi *invertire* la proporzione. Le ragioni 5.3, e 10:6 si dicono *inverse* o *reciproche* delle loro corrispondenti 3:5, e 6:10.

(*) Euclide definisce la ragione così; *la ragione è un* certo *rapporto di due grandezze omogenee secondo la quantità.* Si è molto disputato su quell'addiettivo *un certo*; chi ce lo volea e chi no; chi sosteneva essere un modo di definire tutt'altro che scientifico e geometrico, e chi al contrario vedeva in quel *certo* il meraviglioso della definizione. Queste medesime quistioni in fatto di scienza certa e positiva, mostrano che la definizione di Euclide non dice nulla.

Analogamente, due quantità diconsi in ragione inversa di due altre quando la ragione *diretta* delle prime è eguale alla *inversa* delle seconde, cioè quando la prima *sta* alla seconda *come* la quarta *sta* alla terza. Così 3 *sta a* 5 in ragione inversa di 10 *a* 6. Secondo questo principio, *due frazioni che hanno lo stesso numeratore* stanno *fra loro in ragione inversa de'denominatori*. In fatti due frazioni $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}$ che hanno il medesimo numeratore 4, ridotte allo stesso denominatore stanno fra loro come i numeratori delle nuove frazioni (§. 183) cioè, $\frac{4}{5}:\frac{4}{7}::4\times7:4\times5$, e questa proporzione, dividendo i termini della seconda ragione per 4, si cambia nell'altra, $\frac{4}{5}:\frac{4}{7}::7:5$; vale a dire che la prima frazione sta alla seconda come il denominatore della seconda sta a quello della prima. Se le due frazioni avessero per numeratore comune l'unità sarebbe $\frac{1}{5}:\frac{1}{7}::7:5$; onde si può conchiudere che *la ragione di due numeri qualunque* (7 : 5) *è inversa o sia* reciproca, *della ragione di due frazioni* ($\frac{1}{7}:\frac{1}{5}$), *che hanno per numeratore comune l'unità e per denominatori rispettivi gli stessi numeri*. Per questo motivo le frazioni $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$ diconsi *reciproche* de'numeri 7, 5; e similmente una frazione qualunque $\frac{5}{3}$ si chiama *reciproca* della sua rovesciata $\frac{3}{5}$, perchè può mettersi sotto la forma $\frac{1}{\frac{3}{5}}$.

Se due proporzioni hanno una ragione di comune, le due rimanenti ragioni sono eguali fra di loro.

§. 197. Siano le due proporzioni

$$8:6::4:3$$
$$8:6::12:9$$

le quali hanno di comune la ragione 8:6, deve dimostrarsi che le due ragioni 4:3, e 12:9 sono eguali fra loro, ossia che 4:3::12:9. Questa verità è evidente per se stessa, poichè dalle proporzioni date si desume che ciascuna delle due ragioni 3:4, e 12:9, è la stessa cosa della ragione 8:6, e quindi *due ragioni eguali ad una medesima ragione sono eguali fra loro.* Deduciamo una conseguenza importante.

Consideriamo le due proposizioni

$$3:2::6:4$$
$$3:5::6:10$$

le quali hanno gli stessi antecedenti 3, e 6. Permutandole, avremo le altre due proporzioni

$$3:6::2:4$$
$$3:6::5:10$$

che hanno una ragione 3:6 di comune; per cui sarà 2:4::5:10. Ma questi quattro numeri sono i conseguenti delle prime due proporzioni, dunque *se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti di esse sono in proporzione.*

Similmente si dimostrerebbe che, *se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti delle medesime sono in proporzione.*

Se le due proporzioni avessero gli stessi termini *estremi* come 4.3::8:6,

4:2::12:6, è chiaro che il prodotto 3×8 de' primi due *medii* sarebbe eguale a quello 2×12 degli altri due, dalla quale eguaglianza si dedurrebbe 3:2::12:8, e quindi *se due proporzioni hanno gli stessi termini estremi, i conseguenti delle loro prime ragioni sono in ragione* inversa *degli antecedenti delle seconde.* Ed allo stesso modo, *se due proporzioni avranno gli stessi termini medii, gli antecedenti delle loro prime ragioni saranno in ragione* inversa *de' conseguenti delle seconde.*

Da ogni proporzione geometrica, componendo, *o* dividendo, *si ottiene un' altra proporzione.*

§. 198. Sia data la proporzione

8:6::12:9;

mettiamo le due ragioni 8:6, e 12:9 sotto forma di frazioni ed avremo,

$$\frac{8}{6}=\frac{12}{9}.$$

Or è chiaro che l' eguaglianza di queste due frazioni non si altera, se tanto all' una che all' altra aggiungiamo l' unità; sarà dunque,

$$1+\tfrac{8}{6}=1+\tfrac{12}{9},$$

riducendo intero e frazione ad una sola frazione, si avrà

$$\frac{6+8}{6}=\frac{9+12}{9}.$$

Rimettiamo in proporzione queste due ragioni espresse sotto forma di frazioni, ed avremo,

6+8:6::9+12:9.

È facile osservare in qual modo questa proporzione è formata per mezzo de' quattro numeri componenti la proporzione primitiva 8:6::12:9, per cui si può dire in generale che, *in una proporzione qualunque*, 8:6::12:9, *la somma de' due primi termini sta al secondo, come la somma de' due ultimi termini sta al quarto.*

Inoltre le due proporzioni

6+8:6::9+12:9
8 :6:: 12 :9

hanno gli stessi conseguenti, onde i loro antecedenti sono in proporzione, (§. 197), cioè

6+8:9+12::8:12; e permutando,
6+8:8::9+12:12.

Quindi *in una proporzione qualunque*, 8:6::12:9, *la somma de' due primi termini sta al primo termine, come la somma de' due ultimi termini sta al terzo termine.*

Per brevità di linguaggio, si è convenuto d' indicare con la semplice parola *componendo* l' operazione che si esegue sulla proporzione data 8:6::12:9 per derivarne una delle altre due

6+8:6::9+12:9, 6+8:8::9+12:12

ora dimostrate; onde le proprietà che esse esprimono possono più brevemente enunciarsi, dicendo; *da ogni proporzione geometrica*, componendo, *si ottiene un' altra proporzione*.

§. 199. Riprendiamo la proporzione

$$8:6::12:9,$$

e l' eguaglianza corrispondente,

$$\frac{8}{6}=\frac{12}{9};$$

ed in vece di aggiungere l' unità a ciascuna delle due frazioni eguali $\frac{8}{6}$, e $\frac{12}{9}$, togliamola: sarà,

$$\frac{8}{6}-1=\frac{12}{9}-1.$$

Mettiamo l' unità sotto forma di frazione, ed avremo,

$$\frac{8}{6}-\frac{6}{6}=\frac{12}{9}-\frac{9}{9};$$

eseguendo la sottrazione delle frazioni, sarà

$$\frac{8-6}{6}=\frac{12-9}{9},$$

la quale eguaglianza, messa in aspetto di proporzione, darà,

$$8-6:6::12-9:9.$$

Questa proporzione e l' altra,

$$8:6::12:9$$

hanno gli stessi conseguenti, per cui i loro antecedenti sono proporzionali, cioè,

$$8-6:12-9::8:12;$$

e permutando sarà,

$$8-6:8::12-9:12.$$

Rimangono dunque dimostrate le due nuove proporzioni,

$$8-6:8::12-9:12$$
$$8-6:6::12-9:9$$

le quali si compongono per mezzo de' termini della proporzione primitiva 8:6::12:9 in un modo evidente, e dimostrano, che, *in una proporzione geometrica qualunque la differenza de' due primi termini sta al primo o al secondo termine, come la differenza degli altri due termini sta al terzo o al quarto termine*. Ed essendosi convenuto di esprimere con la parola *dividendo* l' operazione che dà origine ad una delle due precedenti proporzioni, si potrà dire più brevemente che, *da una proporzione geometrica qualunque*, dividendo, *si ottiene un' altra proporzione* (*).

(*) I geometri antichi chiamavano *composizione* di ragione, o *componendo*, il paragone della somma dei due termini di una ragione al conseguente, *divisione* di ragione, o *dividendo* il paragone della differenza dei due termini al conseguente, e *conversione* di ragione, o *convertendo*, il paragone della indicata differenza all' antecedente. Le distinzioni usate qui sopra sono più proprie e più compiute.

§. 200. Dalle quattro proporzioni,

$$8+6:8::12+9:12$$
$$8+6:6::12+9:9$$
$$8-6:8::12-9:12$$
$$8-6:6::12-9:9,$$

possono desumersi due altre importanti conseguenze. Permutiamole, ed avremo le altre quattro,

$$8+6:12+9::8:12$$
$$8+6:12+9::6:9$$
$$8-6:12-9::8:12$$
$$8-6.12-9::6:9;$$

le quali, considerate come composte per mezzo de' termini della proporzione primitiva 8:6::12:9, dimostrano che, *in una proporzione geometrica qualunque, la somma o la differenza de' due primi termini, sta alla somma o alla differenza degli altri due termini, come il primo al secondo antecedente, o come il primo al secondo conseguente.*

Tra le ultime quattro proporzioni, la prima e la terza hanno una ragione di comune, per cui le due rimanenti ragioni sono eguali fra loro, cioè

$$8+6:12+9::8-6:12-9,$$

e permutando si ha,

$$8+6:8-6::12+9:12-9.$$

Dunque *in una proporzione geometrica qualunque*, 8:6::12:9, *la somma dei due primi termini sta alla loro differenza, come la somma degli altri due termini sta alla differenza di essi;* il che si enuncia ancora dicendo, *da una proporzione qualunque* componendo e dividendo *si ottiene un' altra proporzione.*

§. 201. Infine, il *componendo* dà origine anche alla seguente proprietà. *Se tre grandezze qualsivogliano* 6, 10, 16 *sono proporzionali ad altre grandezze* 3, 5, 8, dimodochè si abbia 6:10::3:5, 6:16::3:8, 10:16::5:8, *e fra le prime la somma di due qualunque eguagli la terza, lo stesso dovrà accadere in corrispondenza fra le seconde grandezze.* In fatti, dalla proporzione 6:10::3:5, *componendo* ed *invertendo* si ha 6:6+10::3:3+5; ma questa proporzione ha gli stessi antecedenti dell' altra 6:16::3:8, dunque i conseguenti saranno in proporzione, cioè 6+10:3+5::16:8. Ora, se si supponga che fra le prime tre grandezze la somma 6+10 di due, eguagli la terza 16, in quest'ultima proporzione gli antecedenti saranno eguali, e dovranno esserlo ancora i conseguenti; cioè la somma 3+5 delle due grandezze 3, 5, corrispondenti alle 6, 10 sarà eguale alla terza grandezza 8, corrispondente alla 16.

La somma o la differenza degli antecedenti di una proporzione, sta rispettivamente alla somma o alla differenza de' conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente.

§. 202. Sia data la proporzione

$$8:6::12.9;$$

deve dimostrarsi che,

$$8+12:6+9::8:6, \text{ e}$$
$$12-8:9-6::8:6$$

Permutiamo la proporzione proposta ed avremo,

$$8:12::6:9.$$

Ma si è dimostrato nel §. 200 che la somma o la differenza de'termini del primo rapporto sta alla somma o alla differenza dei termini del secondo rapporto, come il primo al secondo antecedente; dunque applicando questa proprietà alla proporzione permutata 8:12::6:9, si avrà

$$8+12:6+9::8:6, \text{ e}$$
$$12-8:9-6::8:6$$

che sono appunto le proporzioni che si dovevano dimostrare.

Da queste due proporzioni che hanno una ragione di comune risulta pur e che

$$8+12:6+9::12-8:9-6$$

e permutando,

$$12+8:12-8::9+6:9-6,$$

cioè *in una proporzione qualunque* 8:6::12.9, *la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma de' conseguenti sta alla differenza di essi.*

Se si ha una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come un antecedente al suo conseguente, o come la somma di più antecedenti a quella di un egual numero di conseguenti.

§. 203. Siano i rapporti egnali

$$8:6, 12:9, 20:15,$$

deve dimostrarsi che

$$8+12+20.6+9+15::8:6.$$

Consideriamo prima i due rapporti eguali 8:6, e 12:9, ed avremo la proporzione 8: 6::12 9, nella quale, per ciò che si è detto quì sopra, sarà

$$8+12:6+9::8:6;$$

ma essendo i rapporti 8:6, e 20:15 eguali fra loro, può scriversi uno in luogo dell' altro, dunque sarà,

$$8+12:6+9::20:15.$$

Applicando a quest'ultima proporzione la stessa proprietà che la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente si avrà,

$$8+12+20:6+9+15::20:15,$$

ovvero, sostituendo al rapporto 20.15 uno degli altri due rapporti eguali, 8:6, e 12:9, sarà pure

$$8+12+20:6+9+15::8:6, \text{ ed}$$
$$8+12+20:6+9+15::12:9;$$

e poichè si è veduto che una delle ragioni eguali 20:15 eguaglia ancora la ragione delle somme parziali 8+12:6+9 , rimane interamente dimostrata la proporzione enunciata.

Le tre ultime proporzioni possono anche scriversi più brevemente così,

$$8+12+20:6+9+15::8:6::12:8::20:15,$$

ed allo stesso modo si scrive una serie qualunque di rapporti eguali.

Moltiplicando fra loro o dividendo uno per l'altro i termini corrispondenti di due proporzioni, i prodotti o i quozienti saranno anche in proporzione.

§. 204. Siano le due proporzioni

$$4:3::8:6$$
$$2:5::4:10;$$

deve dimostrarsi che

$$4\times2:3\times5::8\times4:6\times10, \text{ e}$$
$$\frac{4}{2}:\frac{3}{5}::\frac{8}{4}:\frac{6}{10}.$$

Si pongano le due proporzioni proposte sotto forma di eguaglianze, e s'avrà

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6},\ \frac{2}{5}=\frac{4}{10}$$

ma essendo le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{2}{5}$ equivalenti rispettivamente alle altre $\frac{8}{6}$ e $\frac{4}{10}$, il prodotto delle prime deve anche eguagliare il prodotto delle seconde, dunque sarà

$$\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{6}\times\frac{4}{10},\ \text{ovvero}\ \frac{4\times2}{3\times5}=\frac{8\times4}{6\times10};$$

alla quale ultima eguaglianza dando l'aspetto di proporzione, si ottiene

$$4\times2:3\times5::8\times4:6\times10.$$

Similmente, se in vece di moltiplicare fra loro le due frazioni $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$ si dividerà una per l'altra, e lo stesso si faccia con le loro equivalenti $\frac{8}{6}$, $\frac{4}{10}$ si avrà

$$\frac{4}{3}:\frac{2}{5}=\frac{8}{6}:\frac{4}{10}$$

e poichè per dividere una frazione per un'altra si divide numeratore per numeratore e denominatore per denominatore (§. 97), sarà

$$\frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{8}{4}}{\frac{6}{10}},$$

la quale eguaglianza corrisponde alla seconda proporzione che doveva dimostrarsi, cioè

$$\frac{4}{2}:\frac{3}{5}::\frac{8}{4}:\frac{6}{10}.$$

§. 205. L'operazione di moltiplicare fra loro i termini corrispondenti delle date proporzioni conduce evidentemente allo stesso risultamento anche quando le proporzioni sono più di due; cioè i prodotti sono sempre in proporzione. Così le tre proporzioni,

$$4:3::8:6,\ 2:4::5:10,\ 3:5::9:15$$

danno origine alla quarta, 24:60::360:900, della quale ogni termine è il prodotto de' termini corrispondenti nelle prime tre. È notabile che ciascuna delle ragioni 24:60, 360:900 equivale alla ragione semplicissima 2:5, che corrisponde alla frazione $\frac{2}{5}$, *espressione più semplice* di $\frac{24}{60}$, non meno che di $\frac{360}{900}$; dimodochè la proporzione 24:60::360:900 potrebbe esser supplita dall'altra 2:5::2:5; cioè da una identità, come si è già avvertito parlando della quantità di ragione.

§. 206. Se si avessero due o tre proporzioni co' termini rispettivamente eguali, moltiplicandoli fra loro, i prodotti, per ciò che precede, risulterebbero anche proporzionali; ma i termini della proporzione così composta sarebbero i *quadrati* o i *cubi* de' corrispondenti termini di ognuna delle proporzioni primitive, dunque si può conchiudere che, *se quattro grandezze sono proporzionali*, per esempio 4:3::8:6, *i loro quadrati*, o *i loro cubi saronno anche in proporzione*; cioè

$$4^2 \, 3^2 : 8^2 . 6^2, \text{ e } 4^3 : 3^3 : 8^3 \, 6^3.$$

Se quattro grandezze sono proporzionali, le loro radici quadrate o cubiche sono anche in proporzione.

§. 207. Sia la proporzione 16:9::64.36, ovvero $\frac{16}{9}=\frac{64}{36}$. Poichè le due frazioni $\frac{16}{9}, \frac{64}{36}$ sono eguali, saranno eguali ancora le loro radici quadrate, e però, $\sqrt{\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{64}{36}}$; ma la radice quadrata si estrae da una frazione estraendola dal numeratore e dal denominatore (§. 154), dunque $\sqrt{\frac{16}{9}}$ è la stessa cosa di $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$ e similmente $\sqrt{\frac{64}{36}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{36}}$; e quindi $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{36}}$, cioè, cambiando l'eguaglianza in proporzione,

$$\sqrt{16}:\sqrt{9}::\sqrt{64}:\sqrt{36}, \text{ ossia } 4:3:8\;6.$$

Lo stesso ragionamento si applicherebbe alle radici cubiche.

Allorchè le quantità componenti la proporzione primitiva non sono quadrati o cubi perfetti, le loro radici sono irrazionali, ma deve nulladimeno sussistere la loro proporzionalità per la giustezza del ragionamento che ad essa ci guida. Così se le due frazioni $\frac{8}{9}, \frac{64}{72}$ sono eguali, dovranno essere eguali ancora le loro radici cubiche, malgrado che non se ne possa assegnare con precisione il valore, cioè dovrà essere $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}=\frac{4}{\sqrt[3]{72}}$, quindi $2:\sqrt[3]{9}::4\cdot\sqrt[3]{72}$. Ed è anche da osservarsi che l'esattezza di una proporzione fra quantità irrazionali può spesso verificarsi applicando ad essa la proprietà dimostrata nel §. 206, poichè elevandone i termini a quadrato o a cubo si può ottenere un'altra proporzione fra quantità razionali. Nell'esempio attuale, elevando a cubo i termini della proporzione $2:\sqrt[3]{9}::4\,\sqrt[3]{72}$, si perviene alla proporzione fra numeri razionali 8:9::64:72.

Della ragione composta.

§. 208. Ragione composta *di due o più ragioni si dice quella di cui l'antecedente è il prodotto degli antecedenti di quelle ragioni ed il conseguente è il prodotto de' conseguenti*. Nel §. 205 moltiplicando più proporzioni termine per termine ne risultarono due ragioni composte eguali; così la ragione di 24:60 fu composta dalle ragioni 4:3,2:4,3:5. Or per indicare che due quantità sono in ragion composta di altre quantità si usa il seguente modo di scrittura,

$$24\cdot60::(4:3)\,(2:4)\,(3:5);$$

e se una ragione, composta di due o più ragioni, è eguale ad un'altra composta di altre ragioni, questa eguagliaza s'indica così,

$$(3:6)\,(8:10)::(4:3)\,(2:4)\,(3:5).$$

E poichè ogni rapporto corrisponde ad una frazione, una ragione composta non è se non il prodotto di più frazioni, onde l'eguaglianza di due ragioni composte può anche scriversi così,

$$\frac{3}{6}\times\frac{8}{10}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}.$$

Se le frazioni corrispondenti a più ragioni date si suppongono ridotte ai loro minimi termini, si comprenderà facilmente che l'*esponente* della ragione composta da quelle ragioni è il prodotto degli esponenti delle ragioni componenti. Alcuni definiscono a questo modo la ragione composta, perchè la moltiplicazione de' termini delle ragioni componenti, considerati quali sono, spesso non avrebbe alcun significato; ma si è veduto come una ragione di due grandezze qualunque possa ridursi ad un rapporto numerico, e quindi le moltiplicazioni si farebbero sempre fra numeri astratti. Altronde la moltiplicazione degli esponenti di ragione suppone trovati questi esponenti, cioè ridotte anche le ragioni date a rapporti numerici, dimodochè risulta evidente che le due definizioni rientrano una nell'altra; noi abbiamo preferita la prima, perchè più comoda nelle applicazioni. Intanto esponiamo brevemente alcune importanti proprietà della ragione composta.

1.ª *Se si abbia un qualsivoglia numero di grandezze, la ragione della prima all'ultima sarà composta delle ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza etc. sino all'ultima.* Siano le quantità 2,7,3,4,5; le ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza etc. potranno esprimersi colle frazioni, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, che moltiplicate fra loro danno $\frac{2.\,7.\,3.\,4}{7.\,3.\,4.\,5}$ nella quale espressione sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, si avrà la frazione $\frac{2}{5}$, indicante appunto la ragione della prima all'ultima delle quantità proposte.

§. 210. 2.ª *Se tre grandezze siano continuamente proporzionali la prima avrà alla terza la stessa ragione cha il quadrato della prima serba al quadrata della seconda: e se quattro grandezze siano continuamente proporzionali, la ragiona della prima alla quarta sarà eguale alla ragione del cubo della prima al cubo della seconda.* Questa proprietà è una conseguenza immediata della precedente: infatti, se si abbiano le quantità 2, 4, 8, 16, componendo successivamente le loro ragioni, sarà, come si è dimostrato,

$$2:\ 8::(2:4)\,(4:8),\ \text{e}$$
$$2:16::(2:4)\,(4:8)\,(8:16);$$

ma per essere le quantità 2,4,8,16 continuamente proporzionali le ragioni 2:4, 4:8, 8:16 sono eguali fra loro, onde si potrà sostituire la prima a ciascuna delle altre; dunque

$$\left.\begin{array}{l}2:\ 8::(2:4)\,(2:4)\\ 2:16::(2:4)\,(2:4)\,(2:4)\end{array}\right\}\ \text{ovvero}\ \left\{\begin{array}{l}2:\ 8::2^2:4^2\\ 2:16::2^3:4^3.\end{array}\right.$$

La ragione dei quadrati si chiamava dagli antichi geometri *ragion duplicata*, perchè composta di due ragioni eguali, e similmente quella dei cubi dicevasi *ragion triplicata*; per cui, secondo questo linguaggio, di quattro grandezze contimuamente proporzionali la prima sta alla terza in ragion *duplicata* della prima alla seconda, e la prima sta alla quarta in ragion *triplicata* della prima alla seconda.

§. 211. 3°. *La ragione di due frazioni è composta della* diretta *dei loro numeratori e della* inversa *de' loro denominatori*. Siano le due frazioni $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$; riducendole allo stesso denominatore la ragione dell' una all' altra potrà essere espressa da quella de' numeratori delle nuove frazioni (§. 183) cioè si avrà,

$$\tfrac{2}{5}:\tfrac{3}{7}::2\times7:3\times5,\ \text{ovvero}$$
$$\tfrac{2}{5}:\tfrac{3}{7}::(2:3)(7:5)\ ;$$

la quale proporzione esprime la proprietà enunciata.

Da qui risulta ancora che *una frazione sta alla sua reciproca come il quadrato del suo numeratore sta al quadrato del suo denominatore*. In fatti.

$$\tfrac{2}{5}:\tfrac{5}{2}::(2:5)(2:5)::2^2:5^2.$$

§. 212. 4.° *Componendo una ragione qualunque con la sua inversa si ha una ragione di uguaglianza;* perchè moltiplicando una frazione qualunque $\frac{2}{5}$, per la stessa frazione rovesciata, $\frac{5}{2}$, deve aversi una frazione col numeratore eguale al denominatore, e così pure dovrà accadere, se si moltiplichi una frazione, $\frac{2}{5}$, per la sua equivalente rovesciata $\frac{15}{6}$, cui può darsi l' aspetto di $\frac{5\times3}{2\times3}$.

In conseguenza di ciò, nella composizione di più ragioni, si potranno omettere per semplicità le ragioni dirette con le loro corrispondenti inverse, le quali non farebbero che complicare inutilmente la ragion composta, introducendo fattori eguali ne' suoi termini. Per esempio la ragione di 288:720 composta delle ragioni 8:6, 4:10, 9:12, si potrà ridurre alla semplice ragione di 4:10, ovvero 2:5 sopprimendo nella composizione le ragioni 8.6, 9:12 inversa una dell' altra.

CAPO II.

DELLA REGOLA DEL TRE E DI ALTRE CHE NE DIPENDONO.

Della regola del tre. Del medio geometrico.

§. 213. La teoria delle proporzioni si applica alla risoluzione di molte quistioni, o *problemi* di Aritmetica (*). Per esempio, sapendosi che per comprare 8 palmi di panno si sono spesi 24 ducati, si domanda quanto costeranno 2 palmi dello stesso panno? È chiaro che la metà del numero di palmi di panno costerà la metà del numero di ducati, e similmente la terza parte del numero di palmi di panno costerà la terza parte del numero di ducati etc.; cioè quante volte il primo numero di palmi contiene il secondo, altrettante il primo numero di ducati dovrà contenere il secondo numero di ducati, che si cerca: ma 8 palmi contiene 2 palmi

(*) Si chiama *Problema* una proposizione che esprime una domanda o una quistione da risolversi, e si distingue dal *Teorema* che è una proposizione diretta a dimostrare qualche verità non evidente per se stessa. Per esempio una proposizione così espressa; *ridurre a minimi termini la frazione* $\frac{12}{16}$, è un problema; e quest' altra, *il prodotto di due frazioni è eguale al prodotto dei numeratori, diviso per quello dei denominatori* è un teorema.

quattro volte, dunque 24 ducati dovrà contenere *quattro* volte il costo di 2 palmi di panno, il quale per conseguenza sarà 6 ducati. Ora, deve riflettersi che i numeri 8, 2, 24, 6 formano una proporzione di cui erano dati i primi tre termini e si è trovato il quarto. Nel §. 176 ancora, applicando ad un caso meno semplice la regola di prendere in parti, si è trovato il quarto termine di una proporzione, allorchè si è calcolato il prodotto di una macchina a vapore in un dato tempo. Ma la risoluzione di simili quistioni non è sempre così facile, e si può dare una regola generale per determinare un termine qualunque di una proporzione quando si conoscono gli altri tre.

L'operazione mediante la quale dati tre termini di una proporzione si trova il quarto, dicesi REGOLA DEL TRE.

Sia la proporzione $5:3::10:x$, in cui la lettera x, posta in luogo del quarto termine, dinota che quel termine non si conosce ancora. Poichè in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale a quello dei termini medii (§. 192), 5 *moltiplicato per* x dovrà essere *eguale a* 3×10, ovvero

$$5\times x=30.$$

Dunque 30 è eguale al prodotto di 5 per x, ossia 30 è un prodotto di cui si conosce un fattore 5 e si cerca l'altro fattore x. Questo fattore si otterrà perciò dalla divisione di 30 per 5, e si avrà

$$x=\frac{30}{5}=6.$$

E riflettendo che il numero 30 è nato dal prodotto de' numeri 3 e 10, che sono i termini medii della proporzione, e 5 è il termine estremo conosciuto, si conchiuderà che, *quando in una proporzione si cerca uno de' termini estremi, questo termine si ottiene moltiplicando fra loro i due termini medii, e dividendo il prodotto per il termine estremo conosciuto.*

Se fosse incognito un termine medio, come nella proporzione $5:x::10:6$, con un ragionamento simile al precedente si troverebbe,

$$x=\frac{5\times6}{10}=3$$

ossia, *quando si cerca uno dei termini medii, si moltiplicano gli estremi, ed il prodotto si divide per il termine medio conosciuto.*

§. 214. In una proporzione continua può essere incognito il terzo termine, o pure il termine medio. La ricerca del terzo termine non è diversa da quella del quarto termine di una proporzione qualunque; per esempio, nella proporzione continua $4:3::3:x$ sarà,

$$x=\frac{3\times3}{4}=\frac{3^2}{4}=2\tfrac{1}{4};$$

ma se si cerca il termine medio, il suo valore dipende da una estrazione di radice quadrata. Così nella proporzione $2:x::x:8$, dovendo il prodotto degli estremi essere eguale a quello de' medii, si avrà $2\times8=x\times x=x^2$: e poichè il quadrato d' x equivale a $2\times8=16$, sarà $x=\sqrt{16}=4$. Similmente dalla proporzione $\div5:x:3$ si ottiene, $x=\sqrt{5.3}=\sqrt{15}=3,87298....$; ed in generale, *in una proporzione continua il termine medio si ottiene moltiplicando fra loro i termini estremi ed estraendo la radice quadrata dal prodotto ottenuto.* Il termine medio di una proporzione continua si chiama ancora il *medio proporzionale geometrico* fra i termini estremi, per cui si po-

tranno ora intendere facilmente le frasi comunissime di *medio geometrico fra due quantità*, o *media proporzionale geometrica* fra due quantità. Analogamente, in una proporzione continua $\div 18:6:2$, il terzo termine 2 si chiama il *terzo*, o *la terza proporzionale geometrica in ordine a 18 e 6*; ed in una proporzione qualunque, $5\cdot10::4\cdot8$, il quarto termine 8 dicesi, *il quarto, o la quarta proporzionale in ordine a 5, 10 e 4*.

La regola del tre si distingue in diretta *ed* inversa *quando si applica ai problemi di Aritmetica.*

§. 215. Applichiamo la regola del tre a qualche problema.

Un operaio ha fatto 41 canne di lavoro in 5 giorni, si domanda per farne 34 quanto tempo impiegherà? Le quantità indicate nel problema si situeranno come segue,

41 *canne* 5 *giorni*
34 *canne* x *giorni*;

ed è chiaro che se il numero delle canne di lavoro fosse la metà di 41, il numero dei giorni per eseguirle sarebbe anche metà di 5, se fosse la terza parte, il numero de' giorni sarebbe il terzo etc.; e però, quante volte il primo numero di canne contiene il secondo, altrettante volte 5 giorni dovranno contenere x giorni. Dunque dovrà esservi proporzione fra i quattro numeri 41, 34, 5 ed x, e si avrà

$41\cdot34::5:x$, da cui si otterrà

$$x=\frac{34\times5}{41}=4^{g}\frac{6}{41}=4^{g}.3^{or}.30^{m}.43^{s},9$$

Ora, si vede che tutta la difficoltà consiste nello stabilire, o come suol dirsi *intavolare* la proporzione. Per dare una regola sicura a quest' oggetto, si osserverà che in ogni proporzione vi sono sempre due termini di una stessa specie, e gli altri due sono pure *omogenei* fra loro, ma di diversa specie dei primi. Così nella precedente proporzione, i due termini 41 e 34 sono canne, e gli altri due 5 ed x sono giorni. Dopo questa distinzione, e ricordandosi che in una proporzione qualunque l' ordine di grandezza dei termini della prima ragione deve esser lo stesso di quello de' termini della seconda ragione (§. 190), si potrà sempre intavolare la proporzione come segue.

Il maggior termine della prima specie sta al minor termine della stessa specie, come il maggior termine della seconda specie sta al minor termine della medesima specie, o pure inversamente, *il minor termine della prima specie sta al maggior termine della stessa specie, come il minor termine della seconda specie, al maggior termine della specie medesima*, poichè si è veduto (§. 196) che una proporzione non si altera *invertendo*. Si sa, per esempio, che 15 canne di stoffa costano 8 ducati, e si domanda quanto costeranno 27 canne della stoffa medesima. Rappresentando con x il prezzo delle 27 canne non ancora conosciuto, si distingueranno qui i due numeri 15 e 27 che sono della stessa specie, cioè sono canne, ed i numeri 8 ed x, che sono pure della stessa specie ma diversa dalla prima, cioè ducati. E poichè un maggior numero di canne di stoffa deve costare di più, il numero x dovrà esser maggiore di 8, onde la proporzione sarà

intavolata così, 15:27::8:x; cioè il minor numero di canne al maggior numero di canne, come il minor numero di ducati al maggior numero di ducati.

§. 216. *La regola del tre si chiama diretta quando crescendo un termine della prima specie, cresce ancora il termine* corrispondente *della seconda specie, o diminuendo il primo, diminuisce il secondo.* Le due quistioni precedenti appartengono alla regola del tre diretta, perchè diminuendo il lavoro da farsi, diminuisce il tempo che deve impiegarvisi, e crescendo il numero delle canne di stoffa, cresce il prezzo corrispondente.

Si chiama regola del tre inversa quella nella quale crescendo un termine della prima specie, diminuisce nella proporzione il termine corrispondente *della seconda specie, o diminuendo il primo cresce il secondo.* Per esempio, 15 operai avendo scavato un fosso in 8 giorni, si domanda 27 operai in quanto tempo scaveranno un fosso eguale? Si situeranno i numeri come segue,

15*operai* 8*giorni*
27*operai* x*giorni*

e si rifletterà che *crescendo* il numero degli operai, deve *diminuire* il numero de' giorni necessari per iscavare il fosso. Così un numero doppio di lavoratori impiegherà a scavare il fosso la metà del tempo, ossia la metà del numero de' giorni, ed un numero triplo di lavoratori impiegherà la terza parte del numero de' giorni etc.; onde quante volte il numero 27 degli operai *contiene* il numero 15 degli operai, altrettante volte il numero x dei giorni *corrispondente* al 27, dovrà *esser contenuto* nel numero 8 dei giorni *corrispondente* al 15, ed x sarà minore di 8 laddove 27 è maggiore di 15. La regola del tre è dunque inversa, e si chiama così perchè la prima ragione di 27:15 è *inversa* della seconda ragione di x:8 (§. 196), ossia i quattro numeri, 27, 15, x, 8 non possono mettersi in proporzione nell'ordine in cui sono, ma per intavolare la proporzione a norma della regola data quì sopra deve rovesciarsi, o invertirsi la ragione di x:8, e scriversi,

27:15::8:x.

Per agevolare anche più il modo di stabilire la proporzione nella regola del tre diretta ed inversa osserveremo che, quando la regola è diretta i numeri che nelle due ragioni si *corrispondono* formano sempre gli antecedenti o i conseguenti della proporzione, e quando la regola è inversa i numeri *corrispondenti* occupano il luogo de' termini estremi o dei medii. Così nella penultima quistione i numeri 15 *canne* ed 8 *ducati*, che si corrispondono, perchè 8 ducati sono il prezzo di 15 canne, formano gli antecedenti della proporzione, ed al contrario nell'ultimo problema gli stessi numeri *corrispondenti* 15 ed 8, i quali esprimono *uomini* e *giorni*, occupano il luogo de' termini medii.

Ed è pure da notarsi che quanto abbiamo detto nei §§. 183 e 196 della ragione *diretta* ed *inversa* si accorda esattamente con l'applicazione che si fa di queste denominazioni nella regola del tre. In fatti, due frazioni che hanno lo stesso denominatore stanno fra loro come i numeratori, o in *ragione diretta* de' numeratori (§. 183); per esempio, $\frac{5}{4}$:$\frac{7}{4}$; 5:7; ed in questa proporzione i numeri corrispondenti $\frac{5}{4}$, 5, e $\frac{7}{4}$, 7 figurano

da antecedenti o da conseguenti, e di più, *crescendo* i numeri 5, e 7, *crescono* i loro *corrispondenti* $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ (§. 59) come nella regola del tre diretta. Al contrario due frazioni che hanno lo stesso numeratore sono in *ragione inversa* de' loro denominatori (§. 196), per esempio $\frac{4}{5}:\frac{4}{7}::7:5$; e qui i numeri *corrispondenti* $\frac{4}{5}$, 5 occupano nella proporzione i luoghi estremi, e gli altri $\frac{4}{7}$, 7 i luoghi medii, ed inoltre, *crescendo* 7, 5 *diminuiscono* i loro corrispondenti $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{5}$ (§. 60), siccome avviene nella regola del tre inversa.

§. 217. Ecco altri esempii.

I. *Per coprire un certo mobile con una stoffa larga 4 palmi ce ne sono abbisognate* $7^{canne}\ 3^{palmi}$; *si domanda, per coprirla nuovamente con altra stoffa larga* $3^{pal}\ 4^{on}$ *quanta ce ne vorrà?*

4^{pal}	$7^{can}\ 3^{pal}$
$3^{pal}\ 4^{on}$	x

Meno larga è la stoffa e *più* ce ne vuole per adempiere allo stesso oggetto; dunque la regola è inversa, e la proporzione s' intavolerà come segue,

$$3^{pal}\ 4^{on}:4^{pal}::7^{can}\ 3^{pal}:x, \text{ da cui}$$

$$x=\frac{4^{pal}\times7^{can}3^{pal}}{3^{pal}4^{on}}.$$

Per calcolare il valore della quantità incognita x bisognerebbe moltiplicare fra loro due lunghezze (§. 163), e noi non abbiamo ancora una regola onde eseguire questa operazione. Ma si può evitare la difficoltà riflettendo che il valore d' x può scriversi anche così, $\frac{4^{pal}}{3^{pal}\ 4^{on}}\times7^{can}\ 3^{pal}$, e che il quoziente della divisione di 4^{pal} per $3^{pal}\ 4^{on}$ rappresenta un numero astratto (§. 163); di modo che, riducendo quei due numeri complessi ad unità dell' *ultima specie*, (e nel caso attuale ad once), si potrà sostituire alla frazione $\frac{4^{pal}}{3^{pal}\ 4^{on}}$ l'altra $\frac{48}{40}=\frac{6}{5}$, e l' operazione sarà ridotta a moltiplicare il numero complesso $7^{can}\ 3^{pal}$ per 6 e dividerlo per 5, ossia ad aggiungere al numero $7^{can}\ 3^{pal}$ la sua quinta parte, il che darà,

$$x=8^{can}.6^{pal}.9^{on}.3^{min}$$

II. *Un animale da soma ha trasportata in tre quarti d' ora un dato peso alla distanza di 3000 palmi, si domanda per trasportarlo alla distanza di 4200 palmi quanto tempo impiegherà?*

Distanze	*Ore*
3000	$\frac{3}{4}$
4200	x

Maggiore è la distanza, *più* tempo è necessario a percorrerla; la regola è diretta, e si ha,

$$3000:4200::\tfrac{3}{4}:x=\frac{42\times3}{30\times4}=\frac{42}{40}=1^{or},05.$$

III. *Un corpo di 2100 soldati ha consumato un magazzino di farina in 12 giorni, si domanda in quanti giorni una eguale quantità di farina sarà consumata da 3600 uomini?* La regola è inversa, per cui $3600:2100::12:x$, ovvero

Uomini	*Giorni*
2100	12
3600	x

$$36:21::12:x=\tfrac{21}{3}=7 \textit{ giorni}.$$

IV. *Un vascello non ha viveri che per 15 giorni, mentre deve stare in mare altre tre settimane ; si domanda a che dovrà ridursi la razione giornaliera di ciascun individuo affinchè bastino i viveri?*

Giorni	Razioni
15	1
21	x

Questo problema pare che non presenti se non due termini della proporzione, ma esprimendo con 1 la razione ordinaria di un individuo, la razione ridotta si otterrà in parti dell' unità, riflettendo che la regola è inversa, e mediante la proporzione;

$$21:15::1:x, \text{ che darà } x=\tfrac{15}{21}=\tfrac{5}{7}.$$

Deve infine avvertirsi che non sempre coi dati di un problema si può formare una proporzione, ma è necessario che le due specie di quantità che si considerano crescano o diminuiscano proporzionalmente. Per esempio il problema II non potrebbe, a rigore, esser risoluto con una proporzione, perchè le forze dell' animale in un lungo tragitto non possono conservarsi sempre le stesse, e la stanchezza proveniente dalla fatica deve ritardare il suo cammino verso la fine del viaggio ; onde una distanza doppia non sarà percorsa in un tempo doppio ma in un tempo maggiore. Nulladimeno, quando non vi sia modo da valutare esattamente la legge con la quale crescono o decrescono le quantità che entrano nel problema, il valore risultante dalla proporzione potrà spesso considerarsi approssimato, se non esatto. In qualche caso però potrebbe essere interamente falso; così. se un diamante del peso di 7 acini, o *grani*, vale 10 ducati, un altro diamante della stessa qualità e del peso di 14 grani, in vece di valere il doppio, potrebbe valere 50 ducati , perchè il pregio delle pietre preziose dipende dal loro peso non meno che dalla loro rarità, e le pietre più grosse sono di gran lunga più difficili a trovarsi delle mezzane e delle piccole.

[. *Regola del tre composta.*

§. 218. La regola del tre dicesi composta quando il valore della quantità che si cerca non dipende dai soli tre termini di una proporzione, come nella regola del tre semplice, ma da *cinque*, o *sette*, o *nove* etc. quantità, secondo le condizioni del problema: osserviamolo nelle seguenti quistioni.

I. *Quattro operai lavorando per 3 giorni, hanno fatto 8 canne di lavoro; si domanda 13 operai in 7 giorni quanto lavoro faranno?* Dispongansi i numeri come qui appresso,

4 *operai*	3 *giorni*	8 *canne*
13	7	x

e si vedrà subito che in questo problema debbono distinguersi tre ragioni o rapporti, laddove nella regola del tre semplice se ne considerano due soltanto. I tre rapporti sono,

x:8, che è *il rapporto della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere,*

13:4 *rapporto degli operai,*

7:3 *rapporto de' giorni.*

Riflettasi ora, che il lavoro x, che si cerca, non dipende soltanto dal numero degli operai, ma dipende anche dal numero dei giorni, peroc-

chè il lavoro cresce evidentemente per due motivi, cioè crescendo il numero degli uomini, e crescendo il tempo che impiegano a lavorare. Per risolvere il problema consideriamo queste due cagioni separatamente, decomponendo la regola del tre composta in due regole del tre semplici.

In primo luogo rimanga lo stesso il numero dei giorni di lavoro, ed allora la quantità di esso dipenderà dal numero degli uomini soltanto, e crescerà crescendo questo numero. In fatti, ritenendo che 4 uomini in 3 giorni abbiano fatto 8 canne di lavoro, si cerchi il lavoro di 13 uomini negli stessi tre giorni. Si dispongano i numeri al solito, come qui sotto;

$$4^{uomini}\ 3^{giorni}\ 8^{canne}$$
$$13 \quad 3 \quad y$$

e si dirà; se 4 uomini in 3 giorni hanno fatto un certo lavoro, 8 uomini *nello stesso tempo* faranno un lavoro doppio, 12 uomini faranno un lavoro triplo, etc.; onde il lavoro è in proporzione del numero degli uomini soltanto. Dunque per trovare il lavoro di 13 uomini ne' tre giorni indicati, si farà la proporzione,

$$4^{uomini} : 13^{uomini} :: 8^{canne} : y = \frac{8 \times 13}{4}\ canne;$$

e quindi, con supporre lo stesso il numero de' giorni di lavoro, la regola del tre da composta è divenuta semplice, e delle tre ragioni distinte di sopra, è scomparsa appunto la ragione de' giorni che ha i termini eguali.

In secondo luogo rimanga lo stesso il numero degli operai, e si faccia variare il numero de' giorni; la quantità del lavoro dipenderà da questo numero soltanto, e crescerà o diminuirà con esso. Or sapendosi dalla precedente proporzione che 13 uomini in 3 giorni hanno fatto $\frac{8 \times 13}{4}$ canne di lavoro, si cerchi il lavoro che gli stessi 13 uomini faranno in 7 giorni. Le quantità saranno disposte come segue;

$$13^{uomini}\ 3^{giorni}\ \frac{8 \times 13^{canne}}{4}$$
$$13 \quad 7 \quad x$$

e si dirà; se 13 uomini in 3 giorni hanno fatto un certo lavoro, lo *stesso numero di uomini* in 6 giorni farà un lavoro doppio, in 9 giorni farà un lavoro triplo etc., onde il lavoro è in proporzione de' giorni; e per trovare il lavoro fatto dall' indicata compagnia di operai in 7 giorni, si farà la proporzione,

$$3^{giorni} : 7^{giorni} :: \frac{8 \times 13^{canne}}{4} : x^{canne} = \frac{8 \times 13 \times 7}{3 \times 4} = 60\tfrac{2}{3}.$$

E qui ancora, con supporre lo stesso il numero degli operai, si ha una regola del tre semplice, poichè rimane soppressa appunto la ragione degli operai che ha i termini eguali.

Il quarto termine dell' ultima proporzione rappresenta il lavoro di 13 operai in 7 giorni, che è la quantità richiesta nel problema.

È facile mostrare in che modo questa quantità si compone per mezzo delle quantità date. Moltiplichiamo termine per termine le due precedenti proporzioni,

$$4:13::8:y$$
$$3:\ 7::y:x,$$

e ne risulterà l'altra (§. 204)

$$4\times3:13\times7::8\times y:y\times x;$$

dalla quale, dividendo i termini della seconda ragione per y, ed invertendo si avrà

$$x:8::13\times7:4\times3.$$

Ora, essendo i numeri 13, e 7 gli antecedenti delle due ragioni 13:4, e 7:3, ed i numeri 4 e 3 i conseguenti delle ragioni medesime, ne segue che la ragione di x:8, è composta delle ragioni 13:4 e 7:3 (§. 208), che sono quella degli uomini e quella de' giorni. Dunque *nella regola del tre composta la ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere, è composta delle ragioni di tutte le altre quantità che entrano nel problema.*

§. 219. Deve osservarsi che nel problema precedente la ragione degli uomini non meno che la ragione de' giorni sono *dirette* alla ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere (§. 216). In fatti, crescendo il numero degli operai, cresce evidentemente il lavoro che essi fanno, e crescendo il numero de' giorni che impiegano a lavorare, deve anche risultar maggiore il lavoro eseguito. Accade però spesso che qualcheduna delle ragioni che entrano nel problema, sia inversa alla ragione della cosa cercata alla cosa data. Per esempio;

II. *Quattro operai hanno fatto 8 canne di lavoro in 3 giorni; si domanda 9 operai per fare 42 canne di lavoro quanto tempo impiegheranno?* Si dispongano i numeri come segue,

4*operai*	8*canne*	3*giorni*
9	42	x

e si osservi che le ragioni che entrano nel problema sono,

x:3 *ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere, ossia ragione de' giorni,*
9:4 *ragione degli uomini,*
42:8 *ragione del lavoro.*

Riflettasi inoltre che la ragione degli uomini è inversa alla ragione dei giorni, perchè crescendo il numero degli uomini che lavorano, diminuisce il tempo necessario per fare un certo lavoro; e la ragione del lavoro è diretta a quella de' giorni, poichè crescendo il lavoro, ci vuole maggior tempo per eseguirlo.

Ciò posto, il numero x de' *giorni* dipende come nel problema precedente tanto dal lavoro da farsi che dal numero degli uomini che devono eseguirlo; ma queste due cagioni che tendono a far variare il numero x possono considerarsi separatamente, supponendo prima che il lavoro rimanga lo stesso, ed indi che rimanga lo stesso il numero degli uomini.

1.° Si proporrà la quistione,

4 *uomini* hanno fatto 8 *canne* in 3 *giorni*
9 *uomini* per fare 8 *canne* quanti *giorni* impiegheranno?

E per trovare il numero de' giorni che si cerca, si rifletterà che se 4 uomini hanno fatto un certo lavoro in 3 giorni, 8 uomini faranno *lo stesso lavoro* nella metà del tempo, 12 uomini lo faranno nel terzo del tempo etc., onde il numero dei giorni è inversamente proporzionale a quello degli uomini, e si avrà,

$$9:4::3:y=\frac{3\times4}{9}$$

2.° Si proporrà l'altra quistione,

9 *uomini* hanno fatto 8 *canne* in $\frac{3\times4}{9}$ *giorni*

9 *uomini* per fare 42 *canne* quanti *giorni* impiegheranno?
Per trovare il numero dei giorni che si cerca, si osserverà che lo stesso numero di uomini deve impiegare maggior tempo a fare un maggior lavoro, onde il numero de' giorni sarà proporzionale direttamente al numero delle canne e si avrà,

$$8:42::\frac{3\times4}{9}:x=\frac{3\times4\times42}{9\times8}=7.$$

Questo valore d'x esprime il numero dei giorni che impiegheranno 9 uomini a fare 42 canne di lavoro, che è ciò che si domandava; e quindi il problema proposto rimane risoluto con due regole del tre semplici una inversa e l'altra diretta.

Moltiplicando, come sopra, termine per termine le due precedenti proporzioni, si avrà

$$9\times8:4\times42::3\times y:y\times x,$$

e dividendo i termini della seconda ragione per y ed invertendo, sarà

$$x:3::42\times4:8\times9;$$

cioè la ragione di $x:3$ è eguale alla ragione di $42\times4:8\times9$, composta delle due ragioni 42:8, e 4:9. Dunque anche in questo problema la ragione della cosa cercata alla cosa data, è composta delle ragioni di tutte le altre quantità che entrano nel problema; se non che la ragione degli uomini essendo inversa a quella de' giorni, in vece d' introdurre nella composizione delle regioni la ragione 9:4, si è adoperata la sua inversa 4·9.

Tutto ciò premesso, si può dare una regola generale per risolvere qualunque problema dello stesso genere de' due precedenti. Eccola.

1.° *Situate le quantità che entrano nel problema in due linee orizzontali, scrivendo quelle della stessa specie le une sotto le altre.*

2.° *Esaminate le ragioni delle diverse quantità che entrano nel problema, osservando quali sono dirette, e quali inverse alla ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere.*

3.° *Scrivete le ragioni dirette nell' ordine in cui sono, e le ragioni inverse scrivetele, invertendone i termini.*

4.° La ragione della cosa cercata alla cosa data sarà composta di tutte le altre ragioni, e perciò *stabilite la seguente proporzione, che risolverà il problema.*

La cosa cercata sta alla cosa data dello stesso genere, come il prodotto di tutti gli antecedenti delle altre ragioni, sta al prodotto di tutti i conseguenti. Applichiamo questa regola a qualche altra quistione.

§.220.III. *Quattro mortai sparando per 3 ore al giorno hanno gettato 1000 bombe in una fortezza, nello spazio di 7 giorni; si domanda, 6 mortai sparando 2 ore al giorno, per gettare 1500 bombe quanti giorni dovranno impiegare?*

1.° Scriviamo le quantità secondo la regola

4*mortai*	3*ore*	1000*bombe*	7*giorni*
6	2	1500	x

2.° Esaminiamo le ragioni delle quantità che entrano nel problema. Questo esame sarà facilissimo quando nel quadro precedente che contiene tutte le quantità che entrano nel problema, si abbia l'avvertenza di supporre eguali tutti i numeri della stessa specie, all'infuori de' termini della ragione che si esamina, e della ragione della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere. Così per esaminare la ragione de' mortai la supposizione sarà,

4*mortai*	3*ore*	1000*bombe*	7*giorni*
6	3	1000	x

e si dirà; più mortai si adoperano, e meno giorni vi bisognano per gettare una stessa quantità di bombe, sparando un egual numero di ore al giorno. Dunque la ragione de' mortai è inversa a quella de' giorni, ossia alla ragione della cosa cercata alla cosa data.

Per la ragione delle ore la supposizione sarà,

4*mortai*	3*ore*	1000*bombe*	7*giorni*
4	2	1000	

e si dirà: meno ore al giorno sparano i mortai, ed impiegheranno maggior numero di giorni a gettare la stessa quantità di bombe. Dunque la ragione delle ore è inversa.

Per la ragione delle bombe la supposizione sarà,

4*mortai*	3*ore*	1000*bombe*	7*giorni*
4	3	1500	x

e si dirà; più bombe devono gettarsi, e maggior numero di giorni ci vuole, per uno stesso numero di mortai, che sparino un egual numero di ore al giorno. Dunque la ragione delle bombe è diretta.

È inutile avvertire che nell'esaminare le ragioni non è necessario scrivere ogni volta il quadro delle quantità che si considerano, come abbiamo fatto qui sopra a solo oggetto di agevolare ai giovani l'intelligenza di una teoria, che suol presentare qualche difficoltà.

3.° Scriviamo le ragioni

Ragione della cosa cercata alla cosa data .... $x:7$

Ragione inversa dei mortai .... $4:6$
Ragione inversa delle ore .... $3:2$
Ragione diretta delle bombe .... $1500:1000$

4.° Stabiliamo la proporzione secondo la regola, ed avremo

$$x:7::4\times3\times1500:6\times2\times1000$$

da cui si ottiene,
$$x=\frac{7\times4\times3\times1500}{6\times2\times1000}=\frac{7\times2.2\times3\times3.500}{2.3\times2\times2.500}.$$

e sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore (§. 94), si avrà,

$$x=\frac{7.3}{2}=10\tfrac{1}{2}.$$

Nell'esempio attuale il calcolo per trovare il valore d'x poteva esser più breve, riflettendo che fra le ragioni componenti la ragione x:7, le due 4:6, 3:2 sono inverse una dell'altra, e quindi possono tralasciarsi nella composizione (§. 212). Così si avrebbe immediatamente,

$$x:7::1500:1000::3:2,\ \text{ed}\ x=\frac{7.3}{2}=10\tfrac{1}{2}.$$

§. 221. IV. *Sapendosi che una cisterna, lunga 20 palmi, larga 18 palmi e profonda 15 palmi, può contenere 192 botti d'acqua, si domanda di quante botti sarà capace un'altra cisterna lunga 25 palmi, larga 16 palmi e profonda 17 palmi?*

Le quantità, scritte secondo la regola sono

lunghezze	*larghezze*	*profondità*	*botti d'acqua*
20	18	15	192
25	16	17	x

Più lunga è una cisterna, e più acqua contiene in confronto di un'altra che abbia la stessa larghezza e la stessa profondità; la ragione delle lunghezze è dunque diretta.

Meno larga è una cisterna e meno acqua contiene, paragonata ad un'altra di eguale lunghezza ed eguale profondità; la ragione delle larghezze è diretta.

Più profonda è una cisterna, e contiene più acqua di un'altra della stessa lunghezza e della medesima larghezza; la ragione delle profondità è diretta.

Le ragioni, discusse ed ordinate, sono perciò,

x:192, 25:20, 16:18, 17:15, e quindi

$$x=\frac{192\times25\times16\times17}{20\times18\times15}=\frac{192\times5.5\times4.4\times17}{4.5\times2.9\times3.5}$$

$$=\frac{2.3.32\times\ .17}{2.9.3}=\frac{32.4.17}{9}=241\tfrac{7}{9}.$$

§. 122. Le capacità di due cisterne sono dunque in ragion composta delle loro lunghezze, larghezze e profondità; cioè la capacità di una sta alla capacità dell'altra come il prodotto delle tre *dimensioni* della prima (lunghezza, larghezza e profondità) al prodotto delle tre dimensioni della seconda. Lo stesso accade per due casse, per due vasche, per due canali, ed in generale per due recipienti i quali abbiano una forma diritta e regolare simile a quella delle cisterne, e propriamente la forma detta *parallelepipeda rettangola*; dimodochè se si abbia un recipiente così fatto lungo 8 palmi, largo 5 e profondo 4, ed un altro lungo 1 palmo; largo 1 palmo e profondo 1 palmo, il rapporto della capacità del primo alla capacità del secondo sarà quello de' prodotti $8\times5\times4$, $1\times1\times1$, cioè 160:1. E considerando il primo recipiente misurato per mezzo del secondo, preso per unità (§. 184), il numero 160 basterà a rappresentarne la capacità. È evidente altresì che la capacità di un terzo vaso lungo 4 palmi, largo 2 e profondo 3 sarà similmente espressa dal numero $4\times2\times3=24$; cioè questo terzo vaso conterrà 24 volte la capacità del vaso più piccolo, che sarà la *comune misura* de' primi

duo, e più generalmente potrà considerarsi come l'*unità di misura* con la quale si valuteranno le capacità di tutti i recipienti le cui tre dimensioni sono espresse in palmi. Il vaso, o volume *parallelepipedo* che ha ciascuna delle sue tre dimensioni eguali ad un palmo, e può servire di *unità di misura* delle capacità o de' volumi, si chiama *palmo cubico*, perchè la sua capacità risulta dal prodotto di un palmo moltiplicato due volte per se stesso, cioè da $1\times1\times1$, come si è veduto qui sopra. Adottando questo *modulo* generale, le capacità delle indicate due cisterne sarebbero espresse da $20\times18\times15=5400$ *palmi cubici*, e da $25\times16\times17=6800$ palmi cubici, ed il numero di botti d'acqua di cui è capace la seconda cisterna si dedurrebbe dalla regola del tre semplice, $5400:6800::192:x$, ovvero $27:34::192:x$.

Con un ragionamento interamente simile sarà facile persuaderci che l'estensione in lunghezza e larghezza, o come suol dirsi, l'estensione *superficiale*, o l'ampiezza di una tavola, del pavimento di una stanza, di un giardino, ed in generale di un oggetto qualunque che abbia la forma detta *rettangolare*, è in ragion composta della lunghezza e della larghezza. Così se un pezzo di tela è lungo 4 palmi e largo 3, ed un altro è lungo 6 palmi, e largo 2, il rapporto di estensione od ampiezza del primo al secondo sarà quello de' prodotti 4×3, 6×2, ovvero di $12:12$; cioè i due pezzi di tela saranno equivalenti, e ciascuno di essi serberà ad un terzo pezzo di tela lungo 1 palmo e largo 1 palmo lo stesso rapporto di $12:1\times1$, ovvero di $12:1$. Laonde qui pure si potrà adottare per *unità di misura superficiale* un' estensione o superficie che abbia per lunghezza 1 palmo e per la larghezza 1 palmo, la quale dicesi *palmo quadrato*, perchè la sua ampiezza risulta dal prodotto di 1 palmo per un palmo quando si paragona ad un'altra. Secondo questa convenzione l'ampiezza o superficie di ciascuno de' due menzionati pezzi di tela sarà espressa da 12 *palmi quadrati*.

Si concepisce facilmente come anche per le semplici *lunghezze* possa stabilirsi una *unità di misura*, per esempio il palmo, il quale prende allora il nome di *palmo lineare* per distinguerlo dal palmo *superficiale* e dal palmo *cubico*, che servono a misurare rispettivamente le superficie ed i volumi; così quando si dice che una strada è lunga 1000 palmi s'intende che la lunghezza della strada è 1000 volte quella del palmo, o sia che la lunghezza della strada sta alla lunghezza del palmo come 1000 ad 1.

Da tutto ciò si può conchiudere che, *una quantità continua qualunque può sempre esprimersi per mezzo di un numero dinotante il rapporto di quella grandezza alla sua unità di misura.*

Lo studio della *Geometria* può solo giustificare pienamente questa maniera di misurare le quantità *continue*, ma noi abbiamo creduto utile anticiparne quì la conoscenza, perchè meglio si comprenda ciò che dovremo dire più innanzi intorno alle *misure*.

Problemi d'interesse.

§.223. Qualunque proprietà, che non sia oggetto di comodo o di lusso per uso particolare di chi la possiede, produce un frutto, quando si sa bene amministrare. Così un podere coltivato, una casa affittata, danno al proprietario una rendita annuale, o in prodotti effettivi del terreno o in denaro; e similmente il denaro, che per convenzione sociale può rappresentare ogni proprietà, quando è messo in commercio o dato a prestito, produce un guadagno, o un *interesse* durante il tempo che rimane *impiegato*. Nell'uso della proprietà produttiva si considerano perciò tre cose principali; 1.° la proprietà o la somma di denaro posta a frutto, che si chiama *capitale*, *fondo*, o *sorte principale*; 2.° la *ragione dell' interesse*, che consiste nel rapporto tra il frutto ed il capitale da cui esso deriva in un anno o in altra unità di tempo; 3.° l'*interesse* o il frutto del capitale alla fine di un tempo determinato. La ragione dell'interesse si stabilisce ordinariamente prendendo per capitale elementare o di paragone il numero

100; per esempio, quando si dice che un capitale di 2000 ducati è stato impiegato alla ragione del 6 *per 100 l'anno*, s'intende essersi convenuto che il frutto del capitale di ducati 2000 alla fine di ciascun anno debba calcolarsi rispetto al capitale stesso nella ragione di 6:100, cioè come l'interesse di 6 ducati annui relativamente al capitale di 100 ducati. Il frutto o l'interesse di un capitale qualunque per un anno si chiama *rendita*.

§. 224. Tutto ciò premesso, il *capitale*, la *ragione dell'interesse* e la *rendita* sono tre cose delle quali due essendo conosciute, si può trovare la terza, come segue.

I. *Sono dati il capitale e la ragione dell' interesse, e si cerca la rendita.* Sia il capitale di 2450 ducati impiegati alla ragione del 6 per 100; per ciò che si è detto di sopra, la rendita o frutto annuale si ottiene dal quarto termine della proporzione

$$100:6::2450:x=2450\times\tfrac{6}{100}=2450\times0,06=147\,;$$

e poichè la ragione dell' interesse è $\frac{6}{100}$ si potrà stabilire la regola che, *per trovare la rendita di un dato capitale, basta moltiplicarlo per la ragione dell' interesse*. Così la rendita di 4524 ducati al $3\frac{1}{2}$ per 100 è

$$4524\times\frac{3\frac{1}{2}}{100}=158,34.$$

II. *È data la rendita e la ragione dell' interesse; si cerca il capitale.* Siccome la rendita è il prodotto del capitale per la ragione dell'interesse, dividendola per uno de' suoi fattori se ne potrà dedurre l' altro fattore. Nel caso attuale *la rendita divisa per la ragione dell' interesse darà il capitale*. Per esempio, il capitale che ha fruttato una rendita di 147 ducati alla ragione del 6 per 100 si ottiene da $\frac{147}{0,06}=2450$. Questo risultamento corrisponde anche al termine incognito della proporzione

$$6:100::147:x=2450.$$

Quando l' interesse si calcola al 5 per 100 il capitale è 20 volte la rendita, poichè dividere un numero qualunque per $\frac{5}{100}$, o sia per $\frac{1}{20}$, vale lo stesso che moltiplicarlo per 20.

È da osservarsi che, dato il capitale, la rendita cresce, crescendo la ragione dell' interesse; e viceversa, data la rendita, il capitale corrispondente è tanto più piccolo quanto maggiore è la ragione dell' interesse.

III. *Dati il capitale e la rendita, si cerca la ragione dell' interesse*; è chiaro che si otterrà *dividendo la rendita per il capitale*. Così se un capitale di 4252 ducati ha prodotto la rendita di 180,71, per sapere a che ragione era impiegato basterà dividere 180,71 per 4252, e si avrà 0,0425; cioè la ragione dell' interesse fu del $4\frac{1}{4}$ per 100. In questo terzo quesito, in vece della ragione dell' interesse, sarebbe più comodo cercare *l' interesse di 100 ducati* in un anno, *il quale si otterrà moltiplicando la rendita per 100 e dividendola per il capitale*, come risulta dalla proporzione

$$4252:100::180,71:x=\frac{18071}{4252}=4\tfrac{1}{4}.$$

In generale è utile osservare che la proporzione,
100 sta *al suo interesse in un anno*, come *un capitale qualunque*
sta *alla sua rendita*,
può servire a risolvere tutti i tre problemi precedenti, secondochè in essi si consideri incognito il *quarto*, il *terzo*, o il *secondo* termine.

§. 225. Ma questa proporzione non basta sola a risolvere i problemi d'interesse quando in vece della rendita si considera il frutto o l'interesse del capitale in un tempo maggiore o minore di un anno. In tal caso, oltre alla proporzione precedente, converrà far uso anche di quella che segue, in cui si tien conto della variazione del tempo;

Un anno sta *al dato tempo*, come *la rendita* sta *all'interesse corrispondente al tempo medesimo*.

Facciamone l'applicazione.

IV. *Trovare il frutto del capitale di* 2450 *ducati impiegato per* 17 *mesi ed* 8 *giorni alla ragione del* 6 *per* 100. Si calcolerà la rendita, o frutto annuale, come nel problema I, indi si farà la proporzione

$$12^{mesi}:17^m 8^g::147:x=147\times\frac{17^m\,8^g}{12^m}.$$

Ma qui, in vece di eseguire la moltiplicazione e la divisione indicate, sarà meglio calcolare il frutto domandato *prendendolo in parti* come nel §.166:

per 12 *mesi*	D.ti 147,00
per 4 *mesi* la terza parte	49,00
per 1 *mese* $(\frac{1}{4})$	12,25
per ... 6 *giorni* $(\frac{1}{5})$	2,45
per ... 2 *giorni* $(\frac{1}{3})$	0,82
per $17^m\,8^g$	D.ti 211,52

V. *Si cerca il valore di un capitale che, impiegato alla ragione del* 6 *per* 100, *ha fruttato* D.ti 211,52 *in* 17 *mesi ed* 8 *giorni*. Per trovare la rendita si stabilirà la proporzione,

$$17^m\,8^g:12^m::211,52:x=211,52\times\frac{12^m}{17^m\,8^g}.$$

Prima di determinare il valore d'x si avverte che, per agevolare il calcolo degl'interessi, si è convenuto generalmente doversi considerare *un mese*, qualunque esso sia, come la *dodicesima* parte dell'*anno*, ed un *giorno* la *trentesima* parte del *mese*. In questa supposizione, adottata anche nel problema precedente, $17^m\,8^g$ equivalgono a

$$17^m+\frac{4}{15}=\frac{259}{15}\text{, ed } x=\frac{211,52\times12\times15}{259}=\frac{211,52\times180}{259}=147.$$

Trovata così la rendita, il capitale corrispondente si calcolerà come nel problema II.

VI. *A che ragione è stato impiegato il capitale di* D.ti 2450, *che in* $17^m\,8^g$ *ha dato per frutto* D.ti 211,52? Si troverà la rendita con la proporzione,

$$17^m\,8^g:12^m::211,52:x=211,52\times\frac{12^m}{17^m\,8^g}=147;$$

dopo di ciò, col capitale e con la rendita si calcolerà la ragione dell' interesse come nel problema III.

VII. *Un capitale di 2450 ducati ha dato, al 6 per 100, D[ti] 211, 52 d' interesse; si domanda quanto tempo è stato impiegato.* Si cercherà la rendita come nel problema I, indi si farà la proporzione

$$147:211,52::12^m:x=12^m\times\frac{211,52}{147}=17^m8.^g$$

§. 226. De' precedenti problemi gli ultimi quattro potrebbero anche esser risoluti colla regola del tre composta. Indichiamo con C un capitale qualunque, con T il tempo che rimane impiegato, con I l' interesse che produce in questo tempo, e con i l' interesse di un anno sul capitale di 100 ducati; la regola composta distinguerà tre diverse specie di quantità che potranno disporsi come segue,

Capitali	*Tempi*	*Interessi*
100	12*mesi*	i
C	T	I

Laonde, se delle quattro quantità generali i, C, T, I, se ne suppongano conosciute tre, si potrà determinare la quarta con le norme date nel §. 219. Si voglia per esempio trovare l' interesse I, e si dirà; l' interesse cresce crescendo il capitale ed il tempo durante il quale rimane impiegato, per cui le ragioni de' capitali e de' tempi sono dirette a quella della cosa cercata alla cosa data, e si avrà,

$$I:i::C\times T:100\times12.$$

Questa proporzione risolve tutti i quattro ultimi problemi. Infatti, l' interesse cercato I si otterrà subito moltiplicando fra loro i termini medii i, $C\times T$ e dividendo il prodotto che ne risulta per l' estremo 100×12, cioè sarà

$$I=\frac{i\times C\times T}{100\times12}=C\times\frac{i}{100}\times\frac{T}{12}.$$

Similmente si avrà

$$i=I\times\frac{100}{C}\times\frac{12}{T}.$$

Per calcolare C e T si rifletterà che il termine medio $C\times T$ si ha moltiplicando I per 100×12, e dividendo il prodotto ottenuto per i; sarà dunque

$$C\times T=\frac{I\times100\times12}{i}.$$

E poichè la frazione $\frac{I\times100\times12}{i}$ equivale al prodotto di C per T, essa divisa per uno de' fattori C, o T deve dare l' altro fattore; quindi si avrà

$$C=\frac{I\times100\times12}{i}:T=\frac{I\times100\times12}{i\times T},\text{ e}$$

$$T=\frac{I\times100\times12}{i}:C=\frac{I\times100\times12}{i\times C}.$$

Si osservi che nell' ultima proporzione, se si faccia $T=12$, i termini della seconda ragione potranno dividersi per questo numero, e ne risulterà la proporzione $I:i::C:100$ che ha servito a risolvere le prime tre quistioni.

§. 227. Termineremo questo articolo con dare una regola pratica per risolvere il problema IV, che è il più importante, come quello che occorre assai più frequentemente degli altri. Ritenendo, per fissare le idee, i numeri usati di sopra, siccome la rendita 147 si ottiene moltiplicando il capitale 2450 per la ragione dell' interesse $\frac{6}{100}$, (Prob. I) si potrà scrivere $2450\times\frac{6}{100}$ in vece di 147 nell' espressione $x=147\times\frac{17^m8^g}{12^m}$ indicante l' interesse per 17^m8^g (Prob. IV), e si avrà

$$x=2450\times\frac{6}{100}\times\frac{17^m8^g}{12^m};$$

Dalla quale eguaglianza può dedursi la regola che, *l'interesse di un capitale ad una data ragione e per un tempo determinato si calcola, moltiplicando il capitale per la ragione dell'interesse, e pel dato tempo espresso in frazione vera o spuria dell'anno.* Così il frutto di 1520 ducati per 5 mesi e 10 giorni, alla ragione del $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ (*), si ottiene moltiplicando

1520 per $\frac{4\frac{1}{2}}{100}$ e per $\frac{5^m\frac{1}{3}}{12^m}$, cioè si avrà;

$$\textit{Frutto cercato} = 1520 \times \frac{9}{200} \times \frac{16}{36} = 1520 \times \frac{2}{100} = 30,40.$$

§. 228. La regola precedente non è che la traduzione in linguaggio ordinario del valore generale trovato di sopra per l'interesse di un capitale qualunque cioè, $I = C \times \frac{i}{100} \times \frac{T}{12}$, nel quale $\frac{i}{100}$ rappresenta la ragione dell'interesse, e $\frac{T}{12}$, il tempo espresso in dodicesimi di anno. Ma bisogna avvertire che, volendo calcolare quell'interesse con tutta l'esattezza, alla frazione $\frac{T}{12}$ dovrebbe sostituirsi il tempo T espresso in giorni e diviso pel numero de' giorni contenuti in un anno, cioè per 365. Per esempio il frutto di un capitale di 24500 ducati pei mesi di Aprile Maggio e Giugno, e 10 giorni di Luglio alla ragione del 6 p. $\frac{0}{0}$, si calcolerà con tutta l'esattezza, moltiplicando 24500 per 0,06 e per $\frac{101 gior}{365 gior}$, perchè Maggio contenendo giorni 31, i tre mesi equivalgono a 91 giorni. In tal modo si otterrà

$$I = 24500 \times 0,06 \times \frac{101}{365} = 1470 \times \frac{101}{365} = 406,77.$$

Considerando poi i tre mesi eguali fra loro e di 30 giorni ciascuno, come nei problemi precedenti, il valore d' I, espresso da $24500 \times 0,06 \times \frac{3\frac{10}{30}}{12}$, si avrebbe dal seguente calcolo

per un anno..	24500×0,06=1470
per 3 mesi ($\frac{1}{4}$)..	367,5
per...... 10 *giorni* ($\frac{1}{6}$)..	40,83
per $3^m.10g$..	408,33

L'errore che si commette nel modo ordinario di calcolare gl' interessi non è dunque di gran rilievo, attesochè da una parte si trascura qualche giorno nella valutazione del tempo T, e dall'altra l'anno si considera di soli 360 giorni, il che stabilisce un certo compenso nel valore della frazione $\frac{T}{12}$, e secondo i diversi casi l'errore può essere in più o in meno.

§. 229. Non può dirsi lo stesso della maniera, altronde ingegnosa, di calcolare gli interessi usata dai negozianti, che produce un errore spesso più grande. In fatti, essi esprimono il tempo in giorni, e suppongono l'anno di 360 giorni soltanto, dimodochè il frutto di un capitale di Duc. 24500, impiegato al 6 p.$\frac{0}{0}$ come qui sopra, sarebbe dato da,

$$I = 24500 \times \frac{6}{100} \times \frac{101}{360} = 412,42;$$

valore notabilmente maggiore del vero 406,77. Or dalla supposizione dell'anno di

---

(*) La frase, per 100, si scrive abbreviatamente, p. $\frac{0}{0}$, come qui sopra.

360 giorni, e della ragione dell' interesse al 6 p. $\frac{0}{0}$ risulta che il prodotto, $24500\times\frac{6}{100}\times\frac{101}{360}$ si può mutare in $245\times6\times\frac{101}{360}$, ovvero in $245\times\frac{101}{60}$, o finalmente in $\frac{24,5\times101}{6}$; e quest' ultima espressione dimostra che, l' *interesse di un capitale al 6 p. $\frac{0}{0}$ si ottiene moltiplicando la millesima parte del capitale pel numero dei giorni corrispondenti al tempo in cui è posto a frutto, e prendendo la sesta parte del prodotto.* Questo modo di operare riesce molto comodo quando si tratta di calcolare il frutto di diversi capitali alla stessa ragione del 6 p. $\frac{0}{0}$; per esempio, 57 giorni d' interessi sul capitale 2450, 18 giorni sul capitale 15000, 91 giorni sul capitale 3000 etc., si calcoleranno aggiungendo insieme i prodotti $2,45\times57$, 15×18, 3×91 etc., e prendendo il sesto della somma.

Per calcolare l' interesse ad una ragione diversa dal 6 p. $\frac{0}{0}$, si calcolerebbe prima l' interesse al 6, il quale si modificherebbe poi opportunamente, aggiungendovi o togliendone una parte aliquota corrispondente alla differenza delle ragioni. Così l' interesse al $7\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ per 65 giorni sul capitale 24000 si avrà, calcolando il 6 p. $\frac{0}{0}$, ed aggiungendovi la sua quarta parte, perchè l' eccesso $1\frac{1}{2}$ di $7\frac{1}{2}$ sopra 6 è quarta parte di 6; quindi l' interesse al 6 p. $\frac{0}{0}$ essendo $\frac{24\times65}{6}=4\times65=260$, l' interesse al $7\frac{1}{2}$ sarà $260+\frac{260}{4}=325$. Similmente per calcolare l' interesse al 4 p. $\frac{0}{0}$ per 107 giorni sul capitale 12500, si calcolerà l' interesse al 6, che sarà $\frac{12,5\times107}{6}=222,92$, e se ne toglierà la terza parte; il resto 148,61 esprimerà l' interesse al 4.

Regola di sconto.

§. 230. Un capitale qualunque dato ad interesse, se si considera unito al suo frutto, cresce evidentemente col decorso del tempo; così alla fine di un anno il capitale viene aumentato di un' annata d' interessi, dopo due anni è accresciuto di due annate etc., ed infra l' anno può considerarsi aumentato dell' interesse corrispondente al tempo trascorso da che fu posto a frutto. Per trovare ad un' epoca qualunque il valore di un capitale così aumentato si calcolerà l' interesse per il tempo decorso, e si aggiungerà al capitale primitivo; ma si potrà fare anche diversamente, come segue.

Data la ragione dell' interesse per un anno è facile trovarla per una parte qualunque di esso; così se la ragione è del 6 p. $\frac{0}{0}$ l' anno, per sei mesi sarà del 3 per 100, per quattro mesi del 2 per 100, per un mese di $\frac{1}{2}$ per 100 etc. Laonde per trovare, a cagion d' esempio, il frutto di quattro mesi del capitale 2450 alla ragione del 6 per 100 l' anno, ovvero del 2 per 100 in quattro mesi, dovrà stabilirsi la proporzione.

$$100:2::2450:x=49$$

dalla quale, mettendo in luogo d' x il suo valore 49, componendo ed invertendo (§§. 198, 196) si ottiene l' altra

$$100:102::2450:2499, \text{ e quindi}$$

$$2499=2450\times\frac{102}{100}=2450\times1,02;$$

cioè *il valore di un capitale qualunque ad una data epoca è eguale al capitale primitivo moltiplicato per l' unità accresciuta della ragione dell' interesse corrispondente al tempo durante il quale il capitale è stato impiegato.*

L' ultima proporzione dà pure

$$2450=2499\times\frac{100}{102}=2499\ \frac{102}{100}, \text{ ovvero, } 2450=\frac{2499}{1,02}$$

la quale eguaglianza dimostra che, *conoscendo il valore di un capitale ad una data epoca e la ragione dell' interesse per un anno, si può trovare il capitale primitivo dividendo il dato valore per l'unità accresciuta della ragione dell' interesse calcolata pel tempo duronte il quale il capitale è stato impiegato.* Su questo principio è fondata la regola di sconto.

§. 231. Per agevolare le contrattazioni, specialmente da un paese all'altro, si usano in commercio alcune carte dette *cambiali* o *boni* nelle quali un negoziante promette il pagamento di una somma di denaro alla fine di un tempo determinato. Chi possiede una di queste carte, quando è trascorso il tempo stabilito, o come suol dirsi, alla *scadenza* della cambiale o del *bono*, si presenta al negoziante e riceve la somma promessa; ma se gli bisognasse il denaro prima della scadenza, potrà ritirarlo dallo stesso negoziante, o anche da un altro, rilasciandogliene una parte a titolo d' interesse o guadagno, il quale in questo caso si chiama *sconto*, e si regola nel modo seguente.

I. Il possessore di una cambiale di 350 ducati, che *scade* dopo 9 mesi, vuol esigere subito il suo denaro, senza aspettare il termine stabilito; si domanda qual somma dovrà ricevere dal negoziante? Riflettasi che costui avendo i suoi capitali in commercio ne ritrae un interesse che supponiamo del 6 *p.* $\frac{0}{0}$ l'anno; per conseguenza, se egli ritenesse per altri 9 mesi presso di sè la somma di cui si tratta, ne ritrarrebbe un frutto che perde anticipandola, ed è questo lo *sconto* che gli si deve (*). Or la somma di 350 ducati promessa nella cambiale può considerarsi come il valore che acquista dopo nove mesi un capitale impiegato al 6 p. $\frac{0}{0}$ l'anno, e la somma che deve ricevere prontamente il possessore della cambiale sarà quel primitivo capitale. Per calcolarlo, a norma della regola data quì sopra, bisogna prima determinare la ragione dell' interesse per 9 mesi, che in proporzione del 6 *p.* $\frac{0}{0}$, l'anno, sarà il $4\frac{1}{2}$ *p.* $\frac{0}{0}$, cioè 0,045; e dividendo poi 350 ducati per 1,045, il quoziente 334,93 indicherà la somma che deve esigere prontamente il proprietario della cambiale. Questa somma è il *valore attuale* della cambiale, chiamandosi *valor nominale* la somma che si paga alla scadenza. Lo sconto rilasciato al negoziante sarà dunque 15,07, differenza fra 350 e 334,93, e corrispondente all' interesse di 9 mesi al 6 *p.* $\frac{0}{0}$ l' anno sulla somma ricevuta di 334,93, come può verificarsi. Questa maniera di calcolare lo sconto è la più giusta, e si chiama *prendere lo sconto al di dentro*, ma è molto più usata la seguente, quantunque meno esatta, in cui lo sconto si prende *all' infuori*.

(*) Quì sopra si è fatto dipendere il calcolo dello sconto da un principio generale che si applica in seguito ad altre quistioni. Ma se si volesse una dimostrazione apposita per la regola di sconto, potrebbe adottarsi la seguente.

Chiamiamo x la somma che il possessore della cambiale deve ricevere dal negoziante, quando vuole subito il suo denaro. Affinchè il negoziante non perda nell' eseguire prontamente un pagamento che sarebbe in obbligo di fare soltanto dopo nove mesi, è chiaro che la somma x deve esser tale che, accresciuta del suo interesse calcolato al 6 per 100 e per 9 mesi, divenga eguale a 350 ducati; così sarà la stessa cosa pel commerciante pagare la somma x prontamente, o la somma di 350 ducati dopo 9 mesi. Ora, un capitale di 100 ducati dà 6 ducati d' interessi in un anno, e quindi in 9 mesi, che sono $\frac{3}{4}$ di un anno, darà $\frac{3}{4}$ di 6 ducati, ossiano ducati $4\frac{1}{2}$. Dunque 100 ducati accresciuti del loro interesse in 9 mesi divengono $104\frac{1}{2}$ ducati; e poichè nello stesso modo x ducati aumentati del loro interesse in 9 mesi debbono divenire 350 ducati, si potrà stabilire la proporzione,

$$100:104,5::x:350,\ \text{da cui si desume}$$

$$x=\frac{35000}{104,5}=334,93.$$

Quindi il negoziante pagherà prontamente ducati 334,93, ritenendo a titolo di sconto ducati 15,07, che sono la differenza fra 350 e 334,93, e corrispondono all' interesse di 9 mesi al 6 per 100, calcolato sulla somma pagata 334,93, come può verificarsi.

Lo sconto si prende *all'infuori* calcolando l' interesse pel tempo della scadenza sul valor nominale della cambiale. Così lo sconto di 350 ducati per 9 mesi al 6 p. % sarà (§. 227),

$$350\times0,06\times\tfrac{9}{12}=350\times0,045=15,75.$$

Similmente lo sconto di D.ti 15140 per 50 giorni al $\frac{3}{4}$ p. % al mese, sarebbe

$$15140\times\frac{\frac{3}{4}}{100}\times\frac{50}{30}=151,40\times\tfrac{5}{4}=189,25;$$

dove si avverte che il tempo della scadenza si è espresso in frazione di mese perchè la ragione dell' interesse era data per un mese.

Per ottenere lo sconto *al di dentro* in questo secondo esempio si cercherebbe la ragione dell' interesse per 50 giorni, equivalenti ad un mese o $\frac{2}{3}$, la quale sarebbe $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{4}$ p. %, ossia $\frac{5}{400}$, e diviso il valor nominale 15140 della cambiale per l' unità accresciuta di questa frazione, si otterrebbe il valore attuale cioè

$15140:\frac{405}{400}=14953,09$; lo sconto sarebbe perciò 186,91, minore dello sconto all' infuori per 2,34. Questa differenza è una perdita che fa il proprietario della cambiale, ed un guadagno del banchiere al di là di quanto gli spetta per l' anticipazione del pagamento.

§. 232. *II.* Un negoziante ha pagato D.ti 14953,09 per una cambiale di D.ti 15140, che scade dopo 50 *giorni*; si domanda a che ragione è stata scontata la cambiale, considerando lo sconto al di dentro? Si è veduto che il valore *attuale* si ottiene dividendo il valor *nominale* per l' unità accresciuta della ragione dell' interesse calcolata pel tempo della scadenza; quindi il valor nominale è un prodotto che ha per fattori il valore attuale e l' unità accresciuta della ragione dell' interesse, e però diviso pel valore attuale, deve dare l'altro fattore. Eseguendo la divisione di 15140 per 14953,09 si avrà per quoziente 1,0125; la ragione dell' interesse sarà dunque 0,0125 per 50 giorni, e per un mese si calcolerà come segue,

per 50 giorni	0,0125
per 10 giorni ($\frac{1}{5}$)	0,0025
per 20 giorni (il doppio)	0,0050
per 30 giorni	0,0075

Se fosse dato lo sconto all' infuori 189,25 della somma 15140, per la scadenza di 50 giorni, e si volesse conoscere la ragione dell' interesse, dovrebbe a quest' oggetto applicarsi la regola data nel §. 225 prob. VI. Ma nel nostro caso, calcolandosi l' interesse per mese e non per anno, in vece della rendita, si cercherà l' interesse per un mese con la proporzione 50:30::189,25: x=189,25×0,6=113,55; indi si dividerà questo numero per 15140, ed il quoziente 0,0075 dinoterà che la cambiale è stata scontata ai $\frac{3}{4}$ p. % al mese.

Posti questi principii non sarà difficile la risoluzione degli altri problemi che potrebbero proporsi su questo argomento, come di trovare il valor nominale della cambiale, conoscendosi il valore attuale, la ragione dell' interesse ed il tempo della scadenza; o pure di trovare questo tempo essendo dati i valori attuale e nominale e la ragione dell' interesse. Noi ne lasciamo il carico ai giovani per loro esercizio.

Della rendita consolidata.

§. 233. Quando un governo per bisogni dello Stato contrae qualche debito, prendendo danaro a prestito da particolari negozianti o banchieri, suole ordinariamente compensarli con creare e cedere a loro favore una *rendita* corrispondente al capitale ricevuto, la quale si paga a rate semestrali dal suo tesoro; riservandosi di *estinguere* a poco a poco il capitale secondo che le sue finanze glielo permettono. I primi proprietari di quella rendita sono dunque i negozianti che hanno fatto l' imprestito, ma per comodità del commercio è stabilito che essa possa cedersi ad altri, restando a cura del governo di far *iscrivere* i nomi dei nuovi possessori in un apposito registro

che suol chiamarsi *Gran Libro;* affinchè godano, in vece degli antichi, de' pagamenti semestrali. La *rendita*, detta *consolidata* o *iscritta,* diviene quindi una mercanzia, che si compra e vende come qualunque altra, e però il suo prezzo varia a norma delle ricerche; è chiaro poi che un tal prezzo rappresenta il capitale corrispondente alla rendita. Il governo nel creare la rendita destina anche un fondo annuale per la sua *ammortizzazione*, cioè impiega annualmente una somma stabilita a comprare dai particolari una porzione di rendita consolidata per annullarla o *ammortizzarla*, ed estinguere così a poco a poco il suo debito. Diminuendo per questo motivo d' anno in anno la quantità della rendita in commercio, ne aumenta naturalmente il prezzo, purchè non vi siano altre cause tendenti a farlo diminuire, come un nuovo imprestito che facesse il governo, o pure qualche oscillazione commerciale o politica, che potrebbero porre in dubbio il pagamento puntuale della rendita.

Le rendite consolidate, offrendo un mezzo comodo e facile d' impiegare il denaro, sono divenute in Europa un ramo importante di commercio, per la qual cosa abbiamo creduto utile di trattare qui appresso le principali quistioni che ad esse si riferiscono.

§. 234. I. Si vogliono acquistare D.ᵗⁱ 114 di rendita iscritta al prezzo di D.ᵗⁱ $81\frac{3}{4}$; si domanda qual somma si dovrà sborsare? Il prezzo che regola tutte le contrattazioni, come quello che si legge sul listini della *Borsa*, corrisponde sempre a 5 ducati di rendita annuale; perciò si dovranno sborsare D.ᵗⁱ $81\frac{3}{4}$ per ogni 5 ducati di rendita, ed il costo di 114 ducati di rendita si otterrà dalla proporzione,

$$5:114::81,75:x=\frac{81,75\times114}{5}=1863,90.$$

Ma questo calcolo si esegue con una regola pratica semplicissima; si cerca il costo di 1 ducato di rendita prendendo la quinta parte del prezzo 81,75, che si ha raddoppiando la sua decima parte (§. 138), ed indi si moltiplica quel costo pel numero 114 indicante la quantità della rendita che si vuol comprare. In altro modo, si moltiplica la decima parte del prezzo pel doppio della rendita da acquistarsi (§ 96), e si ottiene il costo totale della rendita; così 153 ducati di rendita a $99\frac{7}{8}$ importano $9,9875\times306=3056,17\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r} 8,175 \\ 2 \\ \hline 16,350 \\ 114 \\ \hline 6540 \\ 1635 \\ 1635 \\ \hline 1863,90 \end{array}$$

Dalla proporzione precedente avendosi $x=81,75\times\frac{114}{5}$, si vede ancora che la somma da sborsarsi per acquistare una data quantità di rendita si può calcolare moltiplicando il quinto di quella rendita per il prezzo di 5 ducati. E considerando in questa moltiplicazione il quinto della rendita da acquistarsi come moltiplicando, ed il prezzo di 5 ducati come moltiplicatore, è chiaro che crescendo o diminuendo un tal prezzo di una o più unità, il prodotto crescerà o diminuerà di una o più volte il quinto della rendita, cioè *per ogni punto di aumento o di diminuzione del prezzo di 5 ducati, il costo totale di una data quantità di rendita da acquistarsi cresce o diminuisce del quinto di quella rendita.* In effetto, 114 ducati di rendita ad $82\frac{3}{4}$ costano ducati 1886,70, e questa somma supera di $22,8=\frac{114}{5}$ il costo degli stessi ducati 114 trovato di sopra al prezzo di $81\frac{3}{4}$

Se per l' acquisto di una data quantità di rendita si fosse sborsata una certa somma, e si volesse conoscere il prezzo al quale si è comprata quella rendita, da ciò che precede chiaramente appare che bisognerebbe *dividere la somma sborsata per la quinta parte della rendita*, o, ciò che vale lo stesso, *dividere il decuplo della somma sborsata per il doppio della rendita*.

II. Si domanda, quanta rendita iscritta si può comprare con ducati 1863,90 al prezzo di $81\frac{3}{4}$? La proporzione $81,75:1863,90::5:x=114$ risolve il problema, ma il valore d' x si ottiene più facilmente *cercando, come sopra, il costo* 16,35 *di un ducato di rendita e dividendo per questo numero la somma* 1863,90 *da impiegarsi in compra.* Per un altro esempio, si vogliano impiegare 16400 ducati in compra di rendita consolidata a 74: l' operazione per trovare la quantità della rendita consi-te-

rà in dividere 16400 per 14,8 (il quale numero si ottiene raddoppiando la decima parte di 74) ed il quozlente 1108,11 indicherà la rendita che si può acquistare. Ma si avverte che, per semplicità di scrittura, il *Gran Libro* non permette se non l'acquisto di un numero intero di ducati di rendita, incominciando da un ducato.

III. Si vuol sapere a che ragione s'impiegherà il danaro comprandone rendita al prezzo di $81\frac{1}{4}$? Poichè $81\frac{3}{4}$ rappresenta un capitale di cui la rendita è 5, la ragione dell'interesse sarà $5:81\frac{3}{4}$ (§. 224) ovvero $\frac{20}{327}=0,0612=\frac{6,12}{100}$, cioè $6\frac{3}{25}$ *p.* $\frac{0}{0}$ circa.

Si potrebbe anche stabilire la proporzione

$$81\tfrac{3}{4}:100::5:x=\frac{500}{81\frac{3}{4}}=6\tfrac{3}{25} \text{ circa,}$$

dalla quale in vece della ragione dell'interesse si ottiene la rendita di 100 ducati, ma il calcolo è lo stesso.

Degl' interessi a moltiplico.

§. 235. L'interesse di un capitale si paga ordinariamente alla fine di ogni anno, ma se, per le condizioni del debitore, i pagamenti non si fanno con esattezza, gl' interessi di più annate, che sogliono dirsi *arretrati*, non danno alcun frutto, purchè non siasi altrimenti convenuto nel contratto. V'ha però un genere di contrattazioni in cui espressamente è stabilito che gl' interessi che *maturano* alla fine di ogni anno si aggiungano al capitale e producano insieme con esso il frutto dell'anno seguente, e così per più anni successivi sino alla restituzione del capitale con tutti gl' interessi, ed interessi d'interessi, riuniti; una somma impiegata a questo modo dicesi posta a *moltiplico*, come avviene quando si dà il danaro ad una di quelle banche commerciali dette *Casse di risparmii*. Il calcolo degl' interessi a moltiplico, o *composti*, dipende dai principii esposti nel §. 230.

I. Si è dato a moltiplico il capitale di D.ᵗⁱ 2450, convenendosi gl' interessi al 6 *p.* 100 l'anno, si domanda dopo 4 anni a che ascenderà il capitale con gl' interessi? Alla fine del primo anno il valore del capitale unito agl' interessi sarà (§. 230) $2450\times1,06$; siccome questa somma deve considerarsi come un nuovo capitale fruttifero alla stessa ragione del 6 *p.* 100, alla fine del secondo anno il valore di un tal capitale unito agl' interessi sarà $2450\times1,06$ *moltiplicato per* 1,06, cioè $2450\times1,06\times1,06$. Similmente questo terzo capitale unito agl' interessi diverrà alla fine del terzo anno $2450\times1,06\times1,06\times1,06$, e quest' ultimo capitale insieme col suo frutto ascenderà alla fine del quarto anno a

$$2450\times1,06\times1,06\times1,06\times1,06=3093,07.$$

Trattandosi d'interessi semplici, quali vennero considerati di sopra (§. 225), il valore del capitale unito al suo frutto per un dato tempo non cambia se l'interesse si paghi annualmente o pure a rate semestrali, bimestrali, o in qualunque altro modo; ma diversamente accade se si tratta d'interessi *composti*, poichè quanto più breve è il periodo dopo il quale l'interesse si unisce al capitale per produrre un nuovo interesse, più rapido è l'accrescimento del capitale. Ripigliando il problema proposto, se gl' interessi dovessero cumularsi in ogni sei mesi sul capitale, bisognerebbe nel calcolo considerare questo periodo di tempo in vece dell'anno, e poichè la ragione dell'interesse per sei mesi è 0,03, il capitale aumentato dopo 4 anni, ossia dopo 8 *periodi* di sei mesi, sarebbe

$$2450\times1,03\times1,03\times1,03\times1,03\times1,03\times1,03\times1,03\times1,03=3103,59. \ (*)$$

(*) Analogamente a ciò che si è detto del quadrato e del cubo, (§. 146) il prodotto di più fattori eguali fra loro suole indicarsi brevemente scrivendo un solo dei fattori, ed a destra di esso situando un poco in alto il numero dei fattori, che dicesi *esponente* della *potenza*, chiamando così il prodotto di un numero qualunque di fattori eguali. Per esempio, il prodotto qui sopra notato di otto fattori eguali a 1,03 è l'*ottava potenza* di 1,03, e si scrive $1,03^8$, nella quale espressione il numero 8 è l'*esponente* della potenza.

Dunque, *per trovare il valore che acquista una somma data a moltiplico alla fine di un certo tempo, deve moltiplicarsi il capitale proposto per l' unità accresciuta della ragione dell' interesse, corrispondente al periodo stabilito per la cumulazione degl' interessi, e ripetere la moltiplicazione per lo stesso fattore sino a che il numero delle moltiplicazioni sia eguale al numero dei periodi contenuti nel dato tempo.* Così se il capitale di ducati 2450 fosse dato a moltiplico alla ragione del 6 *p.* 100 l'anno, con doversi cumulare gl' interessi ogni 16 mesi, la ragione dell' interesse per questo periodo di tempo sarebbe 0,08, ed il capitale dopo 4 anni, ossia dopo tre periodi di 16 mesi, ammonterebbe a

$$2450 \times 1,08 \times 1,08 \times 1,08 = 2450 \times 1,08^3 = 3086,29.$$

§. 236. Da un simile calcolo risulta che una somma qualunque, posta a moltiplico con gl' interessi al 5 *p.* 100 l' anno, e da cumularsi ogni anno sul capitale, si raddoppia in poco più di 14 anni, laddove riunendo gl' interessi semplici non si raddoppierebbe se non dopo 20 anni, perchè ogni capitale eguaglia 20 volte la sua rendita al 5 *p.* 100; e se la somma sarà posta a moltiplico con gl' interessi alla ragione del 6 *p.* 100, si raddoppierà in poco meno di 12 anni.

Si può dare una regola generale per conoscere in quanti anni diviene doppio o triplo un capitale posto a moltiplico con qualunque interesse: *per trovare il numero degli anni in cui si raddoppia il capitale si dividerà il numero* $69\frac{1}{3}$ *per l'interesse annuale sul capitale* 100, *ed al quoziente si aggiungerà* $\frac{1}{3}$; *e per trovare in quanti anni il capitale diviene triplo, si dividerà il numero* 100 *per quell' interesse ed al quoziente si aggiungerà* $\frac{1}{2}$ (*). Così un capitale posto a moltiplico al 4 *p.* % diviene triplo dopo $\frac{110}{4} + \frac{1}{2} = 28$ anni.

§. 237. II. Un particolare deve soddisfare ad un suo debito di D.[ti] 2000 dopo tre anni; si domanda che somma dovrebbe impiegare a moltiplico, con l' interesse al 6 *p.* 100 l' anno da aggiungersi al capitale in ogni nove mesi, affinchè in tre anni potesse cumulare i 2000 ducati che gli bisognano? La ragione dell' interesse per 9 mesi sarà $0,06 \times \frac{3}{4} = 0,045$, e siccome tre anni contengono quattro periodi di 9 mesi, così chiamando x la somma da darsi a moltiplico, il suo valore alla fine del terzo anno verrà espresso, secondo la regola, da

$$x \times 1,045 \times 1,045 \times 1,045 \times 1,045 = x \times 1,045^4$$

Ma dopo tre anni il capitale impiegato deve aver raggiunto il termine stabilito di 2000 ducati, dunque dovrà verificarsi l' eguaglianza

$$x \times 1,045^4 = 2000$$

dalla quale, come altrove più volte si è mostrato, si ottiene facilmente,

$$x = \frac{2000}{1,045^4} = 1677,12.$$

§. 238. Dovendo scontare una cambiale a lunga scadenza, qualche volta si conviene lo sconto con gl' interessi composti, ed allora è chiaro che la somma da pagarsi prontamente si potrà calcolare come un capitale che dato a moltiplico produca, nel tempo della scadenza, il valor nominale della cambiale. Per esempio il valore attuale di una cambiale di ducati 3000 che scade dopo sei mesi, e deve scontarsi con gl' interessi composti alla ragione dell' 1 *p.* 100 al mese, da cumularsi ogni mese, si calcolerà dividendo 3000 per

$$1,01 \times 1,01 \times 1,01 \times 1,01 \times 1,01 \times 1,01 = 1,01^6$$

ed il risultamento dell' operazione sarà 2826,13.

Degli interessi a scalare. Vitalizi.

§. 239. I contratti di prestito ad interesse detti anche *mutui*, si fanno ordinariamente per un tempo determinato, trascorso il quale, il debitore è obbligato a restituire il capitale con tutti gl' interessi arretrati, qualora non li avesse pagati esat-

---

(*) Per la dimostrazione di questa regola veggasi l' *Appendice*.

tamente alle loro *scadenze*. Ma per rendere più facile la restituzione del capitale spesso si conviene di farla in *rate*, o *dande*, di cui è definita la quantità e l'epoca del pagamento; e siccome in questo caso gl'interessi, dopo il pagamento di una o più rate, non ricadono più sull'intero capitale, ma vanno a mano a mano scemando, così prendono il nome d'interessi *a scalare*. I contratti d'interessi a scalare sono di due maniere, secondochè la rata che si paga alle convenute scadenze comprende oppur no gl'interessi. Per esempio, un capitale di 800 ducati è dato ad interesse col patto di doversi restituire in quattro rate eguali pagabili alla fine di ciascun anno, oltre gli interessi maturati; ed in questo modo di contrattazione, qualunque sia la ragione dell'interesse, il capitale sarà sempre *estinto* nel tempo stabilito di quattro anni, poichè alla fine del 1.° anno il debitore pagherà 200 ducati più gl'interessi calcolati sull'intero capitale, alla fine del 2.° anno pagherà 200 ducati più gl'interessi sul capitale ridotto a ducati 600, e similmente per gli altri due anni. Se però si conviene che la rata di 200 ducati debba essere l'unico pagamento da farsi alla fine di ciascun anno, una parte di questa somma sarà destinata a soddisfare gl'interessi o la rimanente andrà in diminuzione del capitale, ed è chiaro che quest'ultima porzione sarà tanto più grande quanto minore è la prima, cioè quanto minore è la ragione dell'interesse, dalla quale per conseguenza dipenderà pure il tempo della totale *estinzione* del capitale.

Non c'intratterremo sulla prima maniera d'interessi a scalare perchè non presenta alcuna particolarità. Il calcolo degl'interessi alla seconda maniera è anche facile; infatti riprendendo l'esempio precedente, se la ragione dell'interesse sarà del 5 *p.* 100, alla fine del 1.° anno il debitore con 200 ducati pagherà ducati 40 per gl'interessi e ducati 160 in diminuzione del capitale, che sarà ridotto a ducati 640; alla fine del 2.° anno il debitore con 200 ducati pagherà ducati 32 per interessi sul capitale 640, ed altri 168 ducati in diminuzione di esso, e così andando avanti, alla fine del 4.° anno il capitale sarà ridotto a ducati 110,38, che unito al suo interesse ascenderà a ducati 115,90 alla fine del 5.° anno, e potrà essere estinto con una egual somma.

Con quest'ultima specie di contratto la restituzione di un capitale posto a frutto si fa in rate eguali alla fine di ciascun anno, alle quali si dà perciò il nome di *annualità*. Si potrebbe domandare quale deve essere l'annualità da pagarsi per restituire in un dato tempo un capitale impiegato ad una determinata ragione, o pure in quanto tempo con una convenuta annualità dovrà estinguersi un capitale impiegato ad una data ragione; ma questi problemi non si risolvono agevolmente con gli ordinarii mezzi dell'Aritmetica, e noi ci limiteremo a dire qualche cosa dei *vitalizi*, aggiungendo una tavoletta che potrà riuscire utile a coloro che dovessero prender parte a simili contratti.

§. 240. Il *vitalizio* consiste in una annualità che si paga ad alcuno durante la sua vita, a titolo di restituzione di un capitale ricevuto da lui a prestito ad una convenuta ragione. Per comprenderne chiaramente il significato facciamo il seguente confronto. Un capitale di 1000 ducati posto a frutto al 5 *p.* 100 l'anno dà una rendita di 50 ducati, che deve considerarsi *perpetua* perchè, tenendo sempre impiegato il capitale, con rinnovare quando occorre i contratti, esso deve produrre sempre il suo frutto; ma se, dando a prestito il capitale di 1000 ducati, si conviene che debbe essere restituito mediante un'annualità di 100 ducati, dopo 14 anni circa il capitale rimarrà estinto (*); e supponendo inoltre che, in vece di considerare l'annualità di 100 ducati composta degl'interessi a scalare e di parte del capitale, voglia riguardarsi semplicemente come una rendita, si potrà conchiudere che una rendita *perpetua* di 50 ducati, calcolata sul capitale di 1000 ducati alla ragione del 5 *p.* 100 l'anno, equivale ad una rendita di 100 ducati per soli 14 anni, rimanendo estinto il capitale. Ora, se il possessore di un capitale potesse conoscere la durata della propria vita, non avendo eredi cui lasciare la sua proprietà, e con essa la rendita che ne deriva, gli converrebbe cavarne un'annualità o rendita maggiore, e tale che lo rimborsasse mentre vive del suo capitale, che si estinguerebbe alla sua morte. Ma quantunque sia impossibile determinare la durata speciale della vita di un individuo, dalle *Tavole di mortalità* si può desumere quanto probabilmente rimane di vita ad una persona qualunque

(*) È facile, quantunque noioso, verificare questo risultamento col calcolo degl'interessi a scalare al 5 per 100 l'anno.

di conosciuta età. Questo calcolo fondato sull' esperienza di moltissimi anni e di moltissime persone, se può esser fallace per una data individualità, è però sempre esatto nel complesso di molti casi simili, e serve a regolare i contratti di vitalizio secondo l'età, ossia a stabilire l'annualità, o rendita *vitalizia*, da pagarsi in vece della rendita ordinaria, corrispondentemente al capitale che si riceve ed alla ragione dell' interesse convenuta.

Nella seguente tavoletta si veggono in più colonne registrate 1.° *l' età*, 2.° *la corrispondente durata probabile della vita*, 3.° *la rendita vitalizia* calcolata sul capitale di 100 ducati in modo che con quell' annualità si compia la restituzione del capitale durante la vita probabile stabilita nella seconda colonna. E siccome l' annualità cambia con la ragione dell' interesse, così la rendita vitalizia si è calcolata in relazione della rendita ordinaria convenuta alle diverse ragioni del 4, 5, 6 *p.* 100 l' anno.

ETÀ	Durata probabile della vita	RENDITA VITALIZIA corrispondente al capitale 100 quando l' interesse del denaro è al			ETÀ	Durata probabile della vita	RENDITA VITALIZIA corrispondente al capitale 100 quando l' interesse del denaro è al		
		4 *p.* %	5 *p.* %	6 *p.* %			4 *p.* %	5 *p.* %	6 *p.* %
anni	*anni*				*anni*	*anni*			
30	29,39	5,85	6,56	7,32	56	13,30	9,84	10,47	11,12
32	28,14	5,99	6,70	7,44	58	12,20	10,52	11,15	11,79
34	26,88	6,14	6-84	7,58	60	11,14	11,30	11,93	12,57
36	25,62	6,31	7,01	7,74	62	10,12	12,21	12,83	13,47
38	24,36	6,50	7,19	7,94	64	9,15	13,26	13,88	14,51
40	23,09	6,71	7,40	8,11	66	8,24	14,48	15,10	15,73
42	21,83	6,95	7,63	8,34	68	7,38	15,90	16,52	17,15
44	20,56	7,23	7,90	8,59	70	6,58	17,57	18,19	18,82
46	19,30	7,53	8,20	8,89	72	5,83	19,56	20,19	20,82
48	18,06	7,88	8,54	9,22	74	5,14	21,90	22,53	23,17
50	16,83	8,28	8,93	9,60	76	4,51	24,63	25'27	25,92
52	15,63	8,73	9,37	10,04	78	3,93	27,98	28,63	29,29
54	14,45	9,25	9,88	10,54	80	3,45	31,60	32,26	32,92

§. 241. L'uso di questa tavola non è molto difficile. Vogliasi per esempio la rendita vitalizia che una persona di anni 46 deve trarre da un capitale di 2450 ducati, supponendo che la rendita ordinaria si calcoli, ne' contratti di prestito, alla ragione del 4 *p.* %, si cerchi il numero 46 nella colonna dell' *Età*, e nell' incontro della linea orizzontale di questo numero con la colonna verticale del 4 *p.* % si troverà 7,53, che indica la rendita vitalizia di 100 ducati per quell' età; laonde dovendosi per ogni 100 ducati esigere ducati 7,53, si otterrà l'annualità domandata calcolandola come una rendita al 7,53 per 100 sul proposto capitale 2450 (Prob. I, del §. 224), e si avrà,

$$2450 \times \frac{7,53}{100} = 2450 \times 0,0753 = 184,48\tfrac{1}{2}$$

Se l' età fosse $45\frac{1}{2}$, è chiaro che a questo numero, il quale non si trova nella tavola ma è compreso pure fra 44 e 46, dovrà nella colonna del 4 *p.* % corrispondere una rendita compresa pure fra 7,23 e 7,53, e supponendo, come è permesso senza errore sensibile, che gli aumenti della rendita vitalizia siano proporzionali agli aumenti dell' età, si dirà; *un aumento di 2 anni*, *da* 44 *a* 46, sta *ad un aumento*

di $1\frac{1}{2}$ *anni da* 44 *a* $45\frac{1}{2}$, come *stanno fra loro gli aumenti sulle rendite corrispondenti, cioè* come *l'aumento* 0,30, *da* 7,23 *a* 7,53, sta *al quarto termine* x, che rappresenterà l'aumento da darsi alla rendita 7,23 affinchè corrisponda all'età $45\frac{1}{2}$, e dopo avere dalla proporzione $2:1\frac{1}{2}::0,30:x$ dedotto il valore d'$x=0,225$, si aggiungerà a 7,23, e si otterrà le rendita vitalizia 7,455 corrispondente alla età di $45\frac{1}{2}$ sul capitale 100.

Se poi si volesse la rendita vitalizia corrispondente all'età $43\frac{1}{2}$ ed alla ragione $4\frac{1}{4}$, non trovandosi nè l'uno nè l'altro dei due numeri nella tavola, si procederà nel seguente modo: si troverà come quì sopra la rendita al 4 *p.* % corrispondente alla età $45\frac{1}{2}$, e si avrà l'aumento $x=0,225$, e la rendita 7,455; questo numero dovrà essere accresciuto alquanto per l'aumento $\frac{1}{4}$ sulla ragione, e supponendo che per una stessa età gli aumenti delle rendite siano proporzionali a quelli delle ragioni, si dirà, 1 *di aumento sulla ragione* sta *ad* $\frac{1}{4}$ *di aumento*, come *l'aumento* 0,67 *della rendita, da* 7,23 *a* 7,90, sta *al quarto termine* $y=0,67\times\frac{1}{4}=0,167$, che indicherà l'aumento da applicarsi alla rendita 7,455 per farla corrispondere alla ragione $4\frac{1}{4}$; la rendita vitalizia corrispondente all'età $43\frac{1}{2}$ ed alla ragione $4\frac{1}{4}$ sul capitale 100 sarà dunque 7,622 (*). Sul capitale 2450 la rendita vitalizia sarebbe $2450\times0,07622=186,74$.

Aggiungiamo il calcolo di alcuni altri esempi per chiarir meglio queste idee.

Calcolo della rendita vitalizia sul capitale 100

per l'età 69 *e la ragione* $4\frac{1}{2}$

$2:1::17,57-15,90:x$

$$x=\frac{1,67\times1}{2}=0,835$$

$1:\frac{1}{2}::16,52-15,90:y$

$x=0,835$

$y=0,310$

Rendita dalla tavola $=15,90$

Somma $=17,045$

per l'età $75\frac{2}{3}$ *e la ragione* $5\frac{1}{4}$

$2:1\frac{2}{3}::25,27-22,33:x=2,28$

$1:\frac{1}{4}::23,17-22,53\ \ y=0,48$

Rendita dalla tavola $=22,53$

Somma $=25,29$

§. 242. La stessa tavola precedente serve a risolvere il problema inverso cioè *dovendo sciogliere, e come suol dirsi, affrancare un vitalizio, si vuol determinare il capitale da restituirsi in corrispondenza della rendita vitalizia che si paga, dell'età del godente e dell'interesse del danaro negli ordinari contratti di prestito.* Sia la rendita vitalizia di 72 ducati, l'età di colui che ne gode 36 anni, e l'interesse del danaro al 6 *p* %. Cerchiamo nella tavola la rendita vitalizia corrispondente all'età di 36 anni, ed all'interesse del 6 *p.* %, e troveremo 7,74; e siccome una tal rendita corrisponde al capitale 100, è chiaro che se l'annualità che si paga fosse appunto 7,74, per affrancare il vitalizio si dovrebbero sborsare 100 ducati, onde per trovare il capitale corrispondente alla rendita di 72 ducati si farà la proporzione, $7,74:72::100:x$ da cui si desume $x=930,23$, che è il capitale domandato. Se l'età e l'interesse non si trovassero immediatamente nella tavola, bisognerebbe prendere i quarti proporzionali nel modo indicato di sopra.

Della regola congiunta.

§. 243. Questa regola ha per obbietto di trovare il rapporto di due quantità le quali non sono paragonate immediatamente fra loro, ma hanno re-

(*) In generale per trovare un valore corrispondente a due *argomenti* qualunque in una tavola a *doppia entrata* sono necessari tre quarti proporzionali, ma nell'uso della tavola precedente bastano due soltanto, perchè le rendite calcolate per le diverse ragioni del 4, 5, e 6 *p.* 100 aumentano quasi egualmente al crescer della età.

lazioni conosciute con altre quantità intermedie, dimodochè il rapporto cercato risulta dalla composizione di più rapporti dati. Essa si applica principalmente al cambio delle monete, per cui si chiama ancora regola di cambio. La discussione, o più propriamente, l' *analisi* istituita nel seguente problema basterà per darne una idea adeguata.

Si sa che 4 *ducati* napolitani equivalgono a 17 *franchi* (moneta di Francia), che 63 franchi equivalgono a 50 *scellini* inglesi, 130 scellini a 63 *fiorini* austriaci, e 27 fiorini a 260 *reali di veglione* di Spagna; si domanda 45 reali a quanti ducati napolitani corrisponderanno? (*).

Il primo rapporto che presenta l' enunciazione del problema è l' equivalenza di 4 ducati a 17 franchi; questo rapporto può scriversi in forma di eguaglianza come segue, avvertendo che 4 ducati, e 17 franchi sono la stessa cosa di 4 *volte* 1 ducato, e 17 *volte* 1 franco,

$$4 \times 1\ \textit{ducato} = 17 \times 1\ \textit{franco},$$

dove 4 e 16 sono numeri astratti; ma l' eguaglianza di due prodotti si può cambiare in una proporzione (§. 192), dunque si avrà

$$1^{franco} : 1^{ducato} :: 4 : 17.$$

Similmente dal rapporto di equivalenza tra i franchi e gli scellini si dedurrà la proporzione,

$$1^{scellino} : 1^{franco} :: 63 : 50$$

e così facendo con gli altri rapporti, si potranno stabilire le seguenti proporzioni

$$\left.\begin{array}{l} 1^{franco} : 1^{ducato} :: 4:17 \\ 1^{scellino} : 1^{franco} :: 63:50 \\ 1^{fiorino} : 1^{scellino} :: 130:63 \\ 1^{reale} : 1^{fiorino} :: 27:260; \end{array}\right\} (A).$$

Da ultimo, indicando con x il numero di ducati equivalente a 45 *reali*, si avrà l' eguaglianza $45 \times 1\ \textit{reale} = x \times 1\ \textit{ducato}$, che si cambierà nella proporzione

$$1^{ducato} : 1^{reale} :: 45 : x.$$

Si moltiplichino fra loro termine per termine le cinque proporzioni precedenti, e sarà pure

$$1^{fr} \times 1^{sc} \times 1^{fior} \times 1^{re} \times 1^{duc} : 1^{duc} \times 1^{fr} \times 1^{sc} \times 1^{fior} \times 1^{reale}$$
$$:: 4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45 : 17 \times 50 \times 63 \times 260 \times x$$

ma i primi due termini di questa proporzione essendo identici, i secondi termini devono anche essere eguali, dunque

$$4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45 = 17 \times 50 \times 63 \times 260 \times x;$$

dalla quale eguaglianza si otterrà il valore dell' incognita x riflettendo che il primo membro $4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45$ può considerarsi come un prodotto di cui sono fattori $17 \times 50 \times 63 \times 260$ ed x; onde si avrà, come nel §. 213,

$$x = \frac{4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 45}{17 \times 50 \times 63 \times 260} = \frac{4 \times 63 \times 130 \times 27 \times 5.9}{17 \times 5.10 \times 63 \times 2.130} = \frac{27 \times 9}{17 \times 5} = 2,8588.$$

Laonde 45 *reali* equivalgono a *ducati* napolitani $2,85\frac{88}{100}$.

(*) Questi rapporti sono estratti dall' *Annuaire du Bureau des longitudes*, e riguardano i valori delle monete *al pari*, cioè considerando in esse soltanto la quantità di metallo fino d' oro o di argento che contengono, esclusa la *lega*.

§. 244. Da questo procedimento si desume immediatamente una regola pratica semplicissima che può applicarsi a tutti i problemi dello stesso genere. Scriviamo i rapporti di equivalenza enunciati nel problema come segue;

4 *ducati*	=	17 *franchi*
63 *franchi*	=	50 *scellini*
130 *scellini*	=	63 *fiorini*
27 *fiorini*	=	260 *reali*
45 *reali*	=	x *ducati*

eguagliamo il prodotto di tutti i termini della prima colonna al prodotto di tutti i termini della seconda, omettendo le denominazioni, ed avremo

$$4\times63\times130\times27\times45=17\times50\times63\times260\times x;$$

ch'è l' aguaglianza trovata di sopra da cui si è dedotto il valore di x.

Quindi, ecco la regola da stabilirsi. *Scrivete i dati rapporti di equivalenza uno sotto l'altro in modo che il secondo termine di ciascun rapporto sia della stessa specie di unità del primo termine del rapporto seguente, e continuate così sino all' ultimo rapporto di cui il secondo termine dovrà rappresentare la quantità incognita, ed essere della stessa specie di unità del termine iniziale; dopo di ciò dividete il prodotto di tutti i primi termini per quello di tutti i secondi termini esclusa la quantità che si cerca, ed il quoziente esprimerà il valore di quest' ultima quantità.*

§. 245. Facciamo un'altra applicazione di questa regola. Si domanda il *rublo* d'argento di Russia che parte è del ducato napolitano, sapendosi che 86 ducati equivalgono a 425 *lire austriache*, 42 lire austriache a 43 *lire toscane*, 134 lire toscane a 21 *scudi romani*, e 50 scudi romani a 67 *rublį di Russia*? Si scriveranno i rapporti come segue,

86 *ducati*	=	425 *lir. aust.*
42 *lir. aust.*	=	43 *lir. tosc.*
134 *lir. tosc.*	=	21 *scudi rom.*
50 *scudi rom.*	=	67 *rub. di Rus.*
1 *rublo*	=	x *ducati*

dai quali si dedurrà immediatamente,

$$x=\frac{86\times42\times134\times50}{425\times43\times21\times67}=\frac{2.43\times2.21\times2.67\times2.25}{17.25\times43\times21\times67}$$

$$=\frac{2\times2\times2\times2}{17}=\frac{16}{17}=0,9412 \text{ duc.}$$

Un rublo vale dunque *grana* $94\frac{12}{100}$.

§. 246. Dal ragionamento che quì sopra ci ha guidati a stabilire le proporzioni (A) possiamo conchiudere in generale che, *se due quantità omogenee ed equivalenti sono espresse con due numeri diversi, le unità cui questi numeri si riferiscono, dovendo essere disuguali, la maggiore di esse appartiene al numero minore e viceversa; e la ragione di una all'altra unità, è inversa della ragione de' numeri corrispondenti, considerati astratti.* Così, nell'esempio precedente, 86 ducati essendo equivalenti a 425 lire austriache, la lira è minore del ducato nel rapporto di 86 a 425, e quindi

una lira è $\frac{86}{425}$ di ducato, ed un ducato è $\frac{425}{86}$ di lira. Similmente dalla relazione fra le lire austriache e le toscane si desume che una lira toscana è $\frac{42}{43}$ di lira austriaca, cioè $\frac{42}{43}$ *di* $\frac{86}{425}$ *di* ducato; ed andando avanti, poichè uno scudo romano è $\frac{134}{93}$ di lira toscana, equivarrà a $\frac{134}{21}$ *di* $\frac{42}{43}$ *di* $\frac{86}{425}$ di ducato; e finalmente il rubio, che è $\frac{50}{67}$ di scudo romano, equivarrà a $\frac{50}{67}$ *di* $\frac{134}{21}$ *di* $\frac{42}{43}$ *di* $\frac{86}{425}$ *di* ducato. E riducendo ad una frazione semplice questa frazione di frazioni (§. 93), si conchiuderà che il rubio è $\frac{50\times134\times42\times86}{67\times21\times43\times425}$ del ducato, al quale risultamento, identico del precedente, siamo pervenuti per una via alquanto diversa.

Della regola di compagnia.

§. 247. La regola di *compagnia*, o di *società* ha per oggetto di *dividere convenientemente il guadagno o la perdita di una società commerciale fra le persone che vi hanno preso parte.* Ecco alcuni problemi di questo genere.

I. *Tre negozianti hanno riuniti i loro capitali in commercio; il primo ha posto* 2500 *ducati, il secondo* 1800, *il terzo* 4200. *Dopo qualche tempo vogliono dividere fra loro il guadagno ottenuto, che fu di* 5720 *ducati; si domanda quanto spetta a ciascuno?*

Il capitale totale posto in commercio è $2500+1800+4200=8500$ ducati, ed è chiaro che, se uno de' negozianti avesse posto la metà di questo capitale, gli spetterebbe la metà del frutto che ha prodotto, se avesse posta la terza parte del capitale gli spetterebbe la terza parte del guadagno, etc.; dunque il guadagno totale deve contenere il guadagno particolare di ciascun socio tante volte, quante il capitale totale contiene il particolare. Quindi il guadagno particolare di ogni socio si troverà per mezzo della seguente proporzione;

Il capitale totale sta *al capitale particolare* come
il guadagno totale sta *al guadagno particolare*,

e si avrà

$$8500:2500::5720:x=1682\tfrac{6}{17}$$
$$8500:1800::5720:y=1211\tfrac{5}{17}$$
$$8500:4200::5720:z=2826\tfrac{6}{17}$$

Somma de' guadagni particolari 5720

Per ripruova dell'operazione la somma dei guadagni particolari deve ugnagliare il guadagno totale, come di fatto avviene.

Le proporzioni dalle quali si sono dedotti i guadagni particolari x, y, z, hanno gli stessi antecedenti, e però i conseguenti saranno proporzionali (§. 197); cioè sarà

$$2500:x::1800:y::4200:z,\text{ e permutando,}$$
$$2500:1800:4200::x:y:z.$$

Da quì apparisce che *la regola di società consiste nel dividere un numero dato*, per esempio 5720, *in più parti*, x, y, z, *le quali serbino fra loro lo stesso rapporto che hanno l'uno rispetto all'altro alcuni numeri dati*, come

2500,1800,4200. Per trovare ciascuna delle parti domandate si stabiliscano le proporzioni seguenti; *la somma de' dati numeri proporzionali*, 2500, 1800, 4200, o per brevità, 25, 18, 42, sta *al primo di essi*, 25, come *il numero da dividersi*, 5720, sta *alla prima parte*, e similmente per le altre parti.

§. 248. Sotto questo aspetto più generale la regola di compagnia ha molte importanti applicazioni. Essa serve a regolare la distribuzione delle contribuzioni, o dazi che impone il Governo, i quali debbono per giustizia gravitare sulle proprietà in proporzione del loro valore: e similmente, la ripartizione di una spesa qualunque fra più individui, o comunità, in proporzione de' mezzi di ciascuno, si riduce sempre a *dividere un dato numero in parti proporzionali ad altri numeri dati*. A ciò si riduce spesso anche la partizione di una somma con date condizioni. Per esempio, *deve dividersi la somma di 4400 ducati fra 4 persone in modo che la porzione della prima sia doppia di quella della seconda, la porzione della terza sia $\frac{3}{2}$ di ciò che spetta alla prima, e la quarta abbia quanto la prima e la terza insieme; si domanda quanto spetta a ciascuna persona?* Prendendo per unità la parte della seconda persona, quella della prima sarà espressa da 2, e quella della terza, dovendo essere $\frac{3}{2}$ di 2, sarà dinotata da 3; ed infine la porzione della quarta persona, che deve avere quanto la prima e la terza insieme, sarà espressa con 5. Il numero 4400 dovrà dunque dividersi in quattro parti proporzionali ai numeri 2, 1, 3, 5; onde le quattro persone avranno rispettivamente 800, 400, 1200, 2000.

§. 249. Con un procedimento analogo si risolverà quest' altro problema. *Una persona lascia morendo quattro eredi, e dispone che la sua proprietà di 45000 ducati sia divisa fra essi in modo che il primo ne abbia la metà, il secondo la terza parte, il terzo due quinti, ed il quarto un sesto; si domanda quanto spetta a ciascuno?* Essendo la somma delle frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$, maggiore dell' unità, è chiaro che la volontà del testatore non può essere adempita letteralmente, poichè l'eredità non basterebbe neppure per le tre prime porzioni, ma riflettendo all' intenzione che egli ebbe nel fare quella disposizione così strana, si scorge che volle distribuire la sua proprietà fra i quattro eredi in modo che le loro parti fossero proporzionali alle frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$; il problema si riduce dunque a dividere il numero 45000 in quattro parti che stiano fra loro come le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$, ovvero come le altre $\frac{15}{30}, \frac{10}{30}, \frac{12}{30}, \frac{5}{30}$, e quindi come i numeri 15, 10, 12, 5. Fatto il calcolo, le quattro porzioni sono 16071,43; 10714,29; 12857,14; 5357,14.

§. 250. Spesso i negozianti che formano società di commercio non impiegano i loro capitali per lo stesso tempo, ed allora la distribuzione del guadagno deve farsi avendo riguardo a questa condizione particolare, come nell' esempio seguente, e la regola di compagnia dicesi *composta*.

II. *Tre negozianti hanno posto in società i loro capitali e ve li hanno tenuti per tempi diversi cioè, il primo ha messi 4200 ducati per 3 anni, il secondo 2500 per 4 anni ed il terzo 1800 per 6 anni; si domanda come dovrà ripartirsi il guadagno di 5720 ducati fatto dalla società?*

Osserviamo che il frutto di un capitale di 4200 ducati per 3 anni, equivale al frutto di un capitale triplo cioè di 12600, per un solo anno, e similmente il frutto di D.[ti] 2500 per 4 anni eguaglia quello di D.[ti] 10000, quadruplo di 2500, per un anno, ed il frutto di ducati 1800 per 6 anni è lo stesso di quello di 10800 ducati per 1 anno. Dunque ai capitali proposti impiegati per tempi diversi si potranno sostituire gli altri 12600, 10000, 10800, impiegati per lo stesso tempo, e la quistione sarà ridotta a dividere il numero 5720 in parti proporzionali a questi numeri; e siccome essi si ottengono moltiplicando i primi capitali pei tempi corrispondenti, così la proporzione generale che risolve i problemi di società composta è la seguente;

La somma de' prodotti dei capitali proposti pei tempi corrispondenti sta *al guadagno totale* come *uno di quelli prodotti* sta *al guadagno particolare cui ha relazione.*

Allo stesso risultamento si può giungere riflettendo che il guadagno di ogni socio deve esser proporzionale al suo capitale non meno che al tempo che l' ha tenuto impiegato, cioè deve essere in *ragion composta* del capitale e del tempo. La ragione del guadagno del primo socio al guadagno del secondo sarà dunque composta delle ragioni 4200:2500 e 3:4, vale a dire sarà quella de' prodotti $4200 \times 3 : 2500 \times 4$ (§. 208); e similmente i guadagni del secondo e del terzo socio saranno in ragione dei prodotti 2500×4, 1800×6. onde i tre guadagni dovranno essere proporzionali ai prodotti 4200×3, 2500×4, 1800×6, come sopra.

§. 231. Questa maniera di considerare la regola di società composta può avere un uso molto esteso. Per esempio, *i proprietari di più fondi limitrofi variamente coltivati, volendo guarentire la loro rendita dalla mancanza eventuale delle ricolte, convengono di porla in comune e dividerne ogni anno la totalità in proporzione della estensione de' fondi e della fertilità del suolo; le ampiezze dei fondi sono proporzionali ai numeri* 12, 15, 8, 27.... *e le fertilità, dedotte dal confronto delle rendite ottenute per molti anni ne' diversi fondi da eguali porzioni di terreno, sono proporzionali ai numeri* 25, 16, 17, 21...; *si domanda che parte spetterà a ciascun socio della rendita di* ducati 12520 *data dai fondi in un certo anno?* La parte di ciascun socio è tanto più grande quanto più esteso e fertile è il suo fondo; quindi la ragione di una ad un'altra porzione di rendita deve comporsi della ragione delle ampiezze e di quella delle fertilità, cioè deve esser la ragione dei prodotti delle ampiezze per le fertilità. Laonde, per distribuire la rendita secondo il convenuto, bisognerà dividere il numero 12520 in parti proporzionali ai prodotti 12×25, 15×16, 8×17, 27×21......

§. 232. Negli esempii precedenti le cause dalle quali dipende la quantità della parte di ciascun socio concorrono insieme ad accrescerla o diminuirla, ma potrebbe accadere che una causa tendesse ad accrescerla ed un' altra a diminuirla come nei seguenti problemi.

Deve ripartirsi la spesa di una strada fra tutti i Comuni che ne godono, e ciascun Comune deve contribuire in ragione delle proprie rendite e della utilità che ritrae dalla strada; essendo questa tanto più utile ad un Comune quanto più vicina, si vuol conoscere in qual modo dovrà determinarsi la rata di ciascun Comune. Supponendo che le rendite de' diversi Comuni sieno proporzionali ai numeri 11,28,48,52..., e le rispettive distanze dalla strada siano 12, 16, 21, 18...., è chiaro che la rata di ciascun Comune è maggiore quanto più grande è la sua rendita, e quanto più breve è la distanza che lo separa dalla strada; dunque la distribuzione della spesa dovrà farsi in ragion *composta* della ragion *diretta* delle rendite e della *inversa* delle distanze, e siccome la ragione inversa di due numeri 12, 16 può rappresentarsi con quella delle frazioni $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, (§. 196), così in vece di d' introdurre le distanze nella composizione delle ragioni s' introdurranno le loro espressioni *reciproche* $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{18}$... Le rate da pagarsi dai diversi comuni saranno quindi proporzionali ai prodotti di queste frazioni per le rendite corrispondenti, cioè saranno proporzionali alle frazioni $\frac{11}{12}$, $\frac{28}{16}$, $\frac{48}{21}$, $\frac{50}{18}$..., ed in fatti si sa altronde che i valori delle frazioni sono in ragion composta della *diretta* de' numeratori e della *inversa* de' denominatori (§. 211). La spesa della strada sarà perciò divisa in parti proporzionali alle frazioni $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{16}{7}$, $\frac{25}{9}$, ovvero alle altre $\frac{231}{252}$, $\frac{441}{252}$, $\frac{576}{252}$, $\frac{700}{252}$, o finalmente ai numeri 231, 441, 576, 700.

Dovendosi in molta fretta riattare una fortezza si distribuiscono i lavori a diversi appaltatori, e rispetto al pagamento si conviene che, terminati i lavori, si valuteranno, e la totalità del prezzo sarà distribuita fra gli appaltatori in ragione della quantità di lavoro fatto eseguire da ciascuno, non meno che della qualità, e della sollecitudine con la quale fu portato a termine; si domanda come dovrà regolarsi la distribuzione? Le quantità di lavoro siano proporzionali ai nu-

meri 20, 30, 15, 54 etc. e le qualità ai numeri 25, 27, 28, 24..., i quali rappresentano i prezzi di una eguale porzione di lavoro eseguita dai diversi appaltatori, perchè quando le quantità sono eguali i prezzi sono proporzionali alle qualità; i tempi impiegati nell'esecuzione de'lavori dagli appaltatori siano rispettivamente 10,15,9,36.. Or dovendo la rata di ciascun appaltatore crescere in ragione della maggior quantità del lavoro, della migliore qualità e del minor tempo impiegato; le ragioni della quantità e della qualità saranno *dirette*, e la ragione del tempo *inversa*; quindi nella composizione delle ragioni si sostituiranno ai tempi le quantità reciproche $\frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{9}, \frac{1}{36}$, ed il prezzo totale de' lavori si dividerà in parti proporzionali a'prodotti, $20 \times 25 \times \frac{1}{10}$, $30 \times 27 \times \frac{1}{15}$, $15 \times 28 \times \frac{1}{9}$, $54 \times 24 \times \frac{1}{36}$, ovvero ai numeri 75, 81, 70, 54.

CAPO III.

DELLA PROPORZIONE ARITMETICA.

In ogni proporzione aritmetica la somma de' termini estremi eguaglia quella dei termini medii.

§. 253. Abbiamo veduto (§. 182) che per *rapporto* o *ragione aritmetica* di due quantità omogenee s' intende la loro differenza; così il rapporto aritmetico de' due numeri 5 e 3, è 5—3, ossia 2.

Analogamente a ciò che si è detto delle proporzioni geometriche, *si chiama proporzione aritmetica l' eguaglianza di due ragioni aritmetiche*, per esempio i quattro numeri 5, 3, 6 e 4 sono in proporzione aritmetica, perchè la differenza de' due primi eguaglia la differenza degli altri due. La proporzione aritmetica si scrive così

5.3:6.4

e si legge come la proporzione geometrica, 5 *sta a* 3 *come* 6 *sta a* 4.

In ogni proporzione aritmetica la somma dei termini estremi è eguale a quella de' termini medii. Infatti, prendendo per esempio la proporzione 5.3:6.4, essa può cambiarsi nell' eguaglianza $5-3=6-4$, e se ai resti eguali delle due sottrazioni $5-3$, $6-4$ si aggiunga la somma $3+4$, si otterrà una nuova eguaglianza $5-3+3+4=6-4+3+4$, la quale, riflettendo che i numeri 3,4 sottratti e poi aggiunti svaniscono, diviene $5+4=6+3$; e siccome i numeri, 5,4 sono i termini estremi della proporzione e gli altri 3,6 sono i termini medii, rimane dimostrato il teorema enunciato.

Dati tre termini di una proporzione aritmetica si può trovare il quarto, poichè se il termine incognito è uno degli estremi, si otterrà togliendo dalla somma dei dati *medii* l' altro *estremo* conosciuto, e se il termine incognito è uno de' medii, si avrà togliendo dalla somma de' due estremi dati il medio conosciuto.

Del medio aritmetico.

§. 254. Tre numeri sono in proporzione aritmetica quando la differenza tra il primo ed il secondo eguaglia la differenza tra il secondo ed il terzo. Allora la proporzione aritmetica, analogamente alla proporzione

continua geometrica, si scrive così $\div 5.3.1$, ed il secondo numero dicesi *medio aritmetico* fra gli altri due. È chiaro che in tal caso la somma dei termini estremi eguaglia il doppio del medio, onde *il medio aritmetico si ottiene prendendo la metà della somma de' termini estremi* (*).

Per analogia si chiama *medio* o *media aritmetica* di più quantità, la somma delle medesime divisa per il loro numero; così *il medio aritmetico* dei numeri 4, 7, 5, 8 è $\frac{4+7+5+8}{4}=6$. Se le quantità di cui deve prendersi il medio sono distribuite in più gruppi di quantità eguali, l'operazione da eseguirsi per ottenerne la quantità media può essere abbreviata; per esempio dovendo prendere il medio di 4, 4, 4; 7, 7, 7; 5, 5; 8, 8, 8, 8, in vece di fare la somma di tutti questi numeri, si aggiungeranno fra loro i prodotti 3.4, 3.7, 2.5, 4.8, e la somma ottenuta si dividerà per la somma de' moltiplicatori 3, 3, 2, 4, onde il medio aritmetico sarà

$$\frac{3.4+3.7+2.5+4.8}{3+3+2+4}=\frac{75}{12}=6,25;$$

dimodochè se si abbiano più quantità omogenee A, B, C, etc., e la prima sia ripetuta m volte, la seconda n volte, la terza p volte etc., la media aritmetica di tutte sarà espressa generalmente come segue,

$$\textit{media aritmetica}=\frac{m.A+n.B+p.C\ldots}{m+n+p\ldots}$$

§. 255. Questo modo di determinare il medio aritmetico serve a trovare il risultamento finale di molte esperienze, od osservazioni, dirette ad ottenere con gran precisione la misura di una certa quantità, o il suo rapporto con altra quantità conosciuta. Eccone qualche esempio.

Occorrendo di conoscere con grande esattezza la lunghezza di una strada limitata fra due punti fissi, se n'è ripetuta più volte la misura; i risultamenti di queste esperienze non sono stati identici, ma due volte la lunghezza della strada si è trovata di palmi 2450,65, altre tre volte di palmi 2450,50, ed un'ultima volta di palmi 2451,00. Le differenze fra questi numeri dimostrano abbastanza che alcuni di essi, e forse tutti, contengono un piccolo errore, il quale potrebbe essere *in più* per taluni, e per altri *in meno*. Ad attenuare questo errore il miglior mezzo è quello di prendere il medio aritmetico di tutte le misure ottenute, che

(*) Le denominazioni di proporzione *geometrica* e proporzione *aritmetica* si sono credute improprie da alcuni matematici, poichè delle proporzioni dette *geometriche* tratta pure, ed in principal modo, l'Aritmetica. Hanno quindi proposto di conservare il nome di proporzione soltanto alla geometrica, e chiamare *equidifferenza* la proporzione aritmetica. Ma riflettendo all'analogia che vi è fra le due proporzioni, e più ancora fra le *progressioni* geometriche, e le aritmetiche, pare che non possa negarsi all'*equidifferenza* il nome di proporzione, e sembra più propria la distinzione che altri fanno di *proporzione per differenza*, e *proporzione per quoziente*; se non che le usatissime denominazioni di *medio aritmetico* e *medio geometrico*, non si trovano d'accordo con tutte queste modificazioni dell'antico linguaggio, e le frasi equivalenti di *medio per differenza*, o *differenziale*, e *medio per quoziente*, non sono usate quasi da alcuno, e non sembrano molto soddisfacenti.

meritano eguale fiducia, per essersi usata sempre la stessa attenzione e diligenza; in tal guisa gli errori in più potranno distruggere in tutto o in parte gli errori in meno, e ciò che rimane trovandosi egualmente ripartito sopra ciascuna misura, diverrà insignificante, e tanto più quanto maggiore sarà il numero delle misure. Quindi la lunghezza più probabile della strada si otterrà dall'espressione

$$\frac{2\times2450,65+3\times2450,50+2451,00}{2+3+1}=2450,633.$$

Vuol determinarsi con gran precisione il rapporto fra il *rotolo* di Napoli ed il *chilogrammo* francese; paragonati i due pesi con esattissime bilance, si è trovato due volte il rotolo equivalente a $0^{ch}89099$, tre volte a $0^{ch},891001$, una volta a $0^{ch},890995$, e quattro volte a 0^{ch} 890998. Dall' insieme di tutte le esperienze risulta perciò che il rotolo espresso in parti del chilogrammo è,

$$\frac{2\times0,89099+3\times0,891001+0,890995+4\times0,890998}{2+3+1+4}=0^{ch},890997,$$

Regola di alligazione.

§. 256. La regola data quì sopra per trovare il medio aritmetico, quando si applica agli usi sociali, si chiama *regola di alligazione*. Eccone alcuni esempii.

1. *Un mercante ha comprato più qualità di vini, cioè*
130 *bottiglie a* 10 *grana l' una*
75.........., *a* 15
231.......... *a* 12
27.......... *a* 20;

esso le mescola e vuol conoscere quanto gli costa una bottiglia della mescolanza.

È chiaro che le

	130 *bottiglie a* 10 *grana l'una costano*	$130\times10=1300^{g}$
	75 .... *a* 15..........................	$75\times15=1125$
	231.......... *a* 12..........................	$231\times12=2772$
	27.......... *a* 20..........................	$27\times20=$ 540
dunque	463 *bottiglie di vino costano in tutto*...............	5737

E però dividendo il prezzo totale del vino pel numero totale delle bottiglie, si avrà il prezzo *medio* di una bottiglia, o sia il costo di una bottiglia della mescolanza, che sarà grana 12,39.

§. 257. Il prezzo del miscuglio, o *lega*, di più metalli fusi insieme si ottiene nello stesso modo; anzi la *regola di alligazione* ha preso in origine il suo nome dalla *lega* de' metalli.

L'oro e l'argento non si trovano mai puri in commercio ma sempre mescolati con una piccola quantità di metallo più vile, come il rame, ed il rapporto fra il peso della parte di metallo fino contenuta nel miscuglio, ed il peso totale di questo, si chiama *titolo*; così una verga di metallo fino combinato con rame per $\frac{1}{10}$ del peso totale si dice *al titolo di* $\frac{9}{10}$, e se la porzione di rame è di $\frac{2}{1000}$ soltanto la verga è al titolo di $\frac{998}{1000}$ etc. Il *titolo* delle monete d'oro o di argento ha lo stesso significato. Nel se-

guente problema si determina il titolo di una lega di più masse dello stesso metallo a diversi titoli.

II. Si è ritirata dal commercio una quantità di monete vecchie per coniarne delle nuove ; ed a tal oggetto si sono fusi insieme 23 rotoli di monete di argento al titolo di 0,825, 14 rotoli di monete dello stesso metallo al titolo di 0,910, e rotola 19 al titolo di 0,845, si domanda il titolo della *lega*. Poichè ogni moneta di argento al primo titolo contiene di metallo fino $\frac{825}{1000}$ del proprio peso, 23 rotoli ne conterranno *rotola* $23\times\frac{825}{1000}$, e ragionando similmente per gli altri due pesi di monete si avrà che,

23 *rot.* a 0,825 *contengono di metallo fino* rot. $23\times0{,}825=18{,}975$
14 *rot.* a 0,910.. $14\times0{,}910=12{,}740$
19 *rot.* a 0,845.. $19\times0{,}845=16{,}055$
56 *rot. di mescolanza contengono di metallo fino*................ 47,770

e siccome il titolo non è che il rapporto del peso della quantità di metallo fino al peso totale, il titolo della *lega* sarà $\frac{47{,}77}{56}=0{,}853$.

Si avverte che spesso si chiama *lega* anche la quantità di metallo ordinario combinata col metallo fino in una verga o in una moneta.

Della regola di falsa posizione.

§. 258. La *regola di falsa posizione* risolve i problemi numerici, determinando il numero che si cerca per mezzo di due numeri supposti. Ecco in che consiste.

Risolvere un problema numerico significa trovare un numero che soddisfaccia alla condizione espressa nel suo enunciato. Ora, in luogo del numero incognito si adotta un numero interamente arbitrario, ed eseguendo con esso le operazioni indicate dall' enunciato del problema, come se si volesse farne la pruova, si vede in qual modo soddisfa alla condizione. Si trova per lo più una differenza fra il risultamento ottenuto dalla supposizione ed il numero esprimente la condizione, e questa differenza si chiama l' *errore della falsa posizione*. Si fa una seconda supposizione arbitraria, o una seconda *falsa posizione*, e si ottiene un secondo *errore*. Dopo queste due operazioni, la regola per determinare il vero valore del numero incognito è la seguente.

« Se i due errori sono della stessa specie, cioè tutti due in eccesso, o tutti due in « difetto, moltiplicate ciascuno dei due numeri supposti per l' errore nascente dall' « l' altro, e dividete la differenza dei due prodotti per la differenza degli errori. « Se poi i due errori sono di diversa specie, vale a dire uno in più e l' altro « in meno, dividete la somma degl' indicati due prodotti per la somma degli er- « rori ». Non si potrà ben comprendere l' uso di questa regola se non applicandola ad alcuni problemi (*).

§. 259. I. *Trovare un numero di cui la metà, il quarto e il quinto uniti insieme facciano 456.*

Supponiamo essere 300 il numero cercato; sarà $\frac{300}{2}+\frac{300}{4}+\frac{300}{5}=285$: dunque la supposizione è falsa, e l' errore *in meno* è $456-285=171$. Supponiamo 500 il numero e si avrà $\frac{500}{2}+\frac{500}{4}+\frac{500}{5}=475$. La nuova supposizione è anche falsa, e l' errore *in più* è 19; gli errori essendo di diverso segno, il numero incognito risulterà dalla *somma* dei prodotti $500\times171+300\times19$ divisa per la somma degli errori $171+19$. Fatto il calcolo, il numero cercato si trova essere 480; ed in fatti

$$\frac{480}{2}+\frac{480}{4}+\frac{480}{5}=456$$

(*) Questa regola si dimostra per mezzo della teorica delle progressioni aritmetiche, come può vedersi nell' *Appendice*.

II. *Quanto tempo vi bisognerebbe per riempire una vasca, aprendo contemporaneamente quattro orifizi, il primo de' quali la riempirebbe da sè solo in 2 ore, il secondo in 3, il terzo in 5 e il quarto in 6 ?*

Supponiamo che ci voglia 1 ora; in questo tempo il primo orifizio riempirebbe metà della vasca, o sia ne riempirebbe $\frac{1}{2}$, il secondo ne riempirebbe $\frac{1}{3}$, il terzo $\frac{1}{5}$ ed il quarto $\frac{1}{6}$. Ma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=1\frac{1}{5}$. dunque la supposizione è falsa, e l'errore è *in più*, ed eguale ad $\frac{1}{5}$. Supponiamo che la vasca si riempia in mezz' ora; il primo orifizio in questo tempo verserebbe un volume d'acqua pari ad $\frac{1}{4}$ della vasca, il secondo ne verserebbe $\frac{1}{6}$, il terzo $\frac{1}{10}$ e il quarto $\frac{1}{12}$. E siccome $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{3}{5}$, la seconda supposizione è falsa, e l'errore *in meno* è $\frac{2}{5}$. Dopo ciò, il tempo necessario per riempire la vasca si ottiene, secondo la regola, dividendo $1\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ per $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$, il che dà $\frac{5}{6}$ di ora, ossiano 50 minuti. Questo risultamento si verifica osservando che in $\frac{5}{6}$ d'ora il primo orifizio versa $\frac{5}{12}$ di acqua, il secondo $\frac{5}{18}$, il terzo $\frac{5}{30}$ ed il quarto $\frac{5}{36}$, e la somma di queste frazioni è eguale appunto all' unità, cioè all' intiera vasca.

III. *Il capitale che un mercante tiene per due anni in commercio è diminuito alla fine del primo anno di ducati* 1200 *pel mantenimento della famiglia, e di un terzo di ciò che resta, per perdite sofferte. Alla fine del secondo anno il capitale residuo, da una parte è diminuito degli stessi ducati* 1200, *e dall' altra è accresciuto della metà di ciò che rimane, per guadagni fatti. Dopo le spese, le perdite e i guadagni, il capitale primitivo si trova ridotto a metà; si vuol conoscere quel primo capitale.* Si supponga di ducati 4200, e si eseguano su questo numero le operazioni indicate nello enunciato del problema; si avrà

Capitale supposto	4200
Deduzione per le spese di famiglia	1200
Residuo	3000
Deduzione per le perdite sofferte	1000
Capitale alla fine del primo anno	2000
Deduzione per le spese di famiglia	1200
Residuo	800
Guadagni fatti	400
Capitale alla fine del secondo anno	1200
Metà del capitale supposto	2100
Errore della supposizione in meno	900

Adottando per seconda posizione il numero 7200, e facendo su di esso le stesse operazioni che sul precedente, si troverà un errore *in più* di ducati 600. Il capitale incognito x sarà dunque espresso, secondo la regola, da

$$x=\frac{4200\times600+7200\times900}{600+900}=\frac{9000000}{1500}=6000$$

Infatti il numero 6000 messo alla pruova non darà alcun errore.

IV. *Due corrieri percorrono la medesima strada ABM nella stessa direzione, ma partono contemporaneamente uno da A e l'altro da B camminando con diversa velocità. Supposta la velocità del corriere A maggiore di quella del corriere B, il primo dovrà raggiungere il secondo verso un punto C della strada. Si vuol determinare la distanza di questo punto d'incontro dal punto A di partenza del primo corriere, essendo data la distanza AB dei due punti di partenza, che si suppone di 20 miglia, e sapendosi che il corriere A fa 10 miglia in un' ora e il corriere B ne fa 8 nello stesso tempo.*

A B C M

Si supponga la distanza incognita AC di 40 miglia; il corriere A percorrerà questo spazio in 4 ore, e nel medesimo tempo il corriere B farà 32 miglia. Ma per incontrare il corriere A doveva farne 20, perchè dalla distanza AC di 40 miglia tolta la AB

di 20, rimane la BC anche di 20, dunque la supposizione è falsa, e l'errore *in più* è di 12 miglia. Facciamo AC=60 miglia; il corriere A impiegherà 6 ore a percorrerla, ed il corriere B in questo tempo farà 48 miglia; e siccome dovrebbe farne 40, perchè da AC=60 tolta AB=20, rimane BC=40, così la seconda posizione è anche falsa con un errore in più di 8 miglia. Dopo di ciò, applicando la regola, la vera distanza AC sarà data dall'espressione,

$$AC=\frac{60\times12-40\times8}{12-8}=100,$$

come può verificarsi.

SEZIONE TERZA

Delle misure.

CAPO I.

DEL SISTEMA METRICO.

Delle misure della città di Napoli prima della legge del 6 *Aprile* 1840.

§. 259. Tutte le contrattazioni commerciali sono regolate da *moduli* o *campioni*, i quali considerati come unità, servono a valutare in numeri le quantità dei generi che si vogliono vendere o comprare, e diconsi *misure*. Così volendo comprare una certa quantità di panno, dovrà esso valutarsi per mezzo di una lunghezza presa per unità, per esempio il *palmo*; affinchè stabilito il prezzo di un palmo di panno, possa subito conoscersi il costo della quantità di panno che si desidera, come di palmi $3\frac{1}{4}$. Le misure sono di varie specie secondo l'uso al quale vengono destinate, e si distinguono principalmente in

Misure di lunghezza
Misure itinerarie
Misure superficiali o agrarie
Misure di capacità pe' liquidi e per gli aridi
Misure di solidità
Pesi.

§. 260. Le misure usate dalla Città di Napoli, prima dell' ultima legge del 6 Aprile 1840, sono le seguenti.

L'unità lineare, o sia di lunghezza, si chiama *palmo*. Il palmo si divide in 12 oncie, e l'oncia in 5 minuti. Si chiama poi *canna* una lunghezza di 8 palmi, e *pertica* (per uso degli architetti) una lunghezza di 10 palmi.

L'unità itineraria, ossia quella che serve a valutare le distanze fra i diversi luoghi e città, si chiama *miglio* e contiene 1000 *passi*, ognuno dei quali vale 7 palmi, dimodochè il miglio contiene 7000 palmi.

Il palmo napoletano, secondo la sua antica definizione di *settemilesima parte del miglio*, equivale a $\frac{100}{378}$ di metro ossia a millimetri 264,55, e sembra maggiore del palmo in uso prima della legge del 6 Aprile, per $\frac{1}{100}$ circa della sua lunghezza. Questa differenza, assolutamente insensibile negli usi comuni, perchè inferiore agli errori provenienti dalla grossolana costruzione delle misure adoperate in

commercio e dal modo di servirsene, deve considerarsi come un'alterazione introdotta ne' campioni dal tempo, per la cattiva maniera di conservarli e di rinnovarli quando erano logori; il fu Generale *Visconti* ne diede luminosa pruova mostrando che il tomolo, il barile, lo staio, ed il rotolo derivano con rapporti semplicissimi, non già dal palmo scorretto, ma dal palmo rettificato di millimetri 264 55, onde questo dovette essere il vero palmo originale che servì di base al sistema delle nostre misure. Nel 1811 una commissione di dotti incaricati del paragone delle misure napolitane con quelle del sistema metrico francese giudicò il palmo di millimetri 263,67, servendosi di un'antica spranga di ferro che si conservava come modulo in Castelcapuano. Questa spranga più non esiste. ed il modulo col quale la città di Napoli regolava le misure del commercio, prima della legge del 6 Aprile, consisteva in un'asta di stadera che fu misurata diligentemente dal Visconti e, per quanto lo permettesse l'imperfetta sua costruzione, fece conoscere che il palmo era di millimetri 264, e non più di millimetri 263.67. Ma la mancanza di buoni campioni e di una legge che stabilisse invariabilmente la vera quantità delle misure ha dovuto dare origine per lo addietro a differenze anche maggiori, poichè autorevoli scrittori hanno in varie epoche assegnate al palmo le lunghezze di 262 millimetri, di 263.7, di 264, di 264.5 di 265.3, di 266.7. Per la qual cosa prima della legge del 6 Aprile non si aveva alcuna precisa cognizione del palmo, e male si appongono coloro che vorrebbero dare al palmo una lunghezza sicura innanzi alla lodata legge, considerandolo di millimetri 263,67, perchè tale era nel 1811, poichè prima e dopo quell' epoca fu sicuramente diverso. E non solo variava il palmo per la imperfezione e instabilità de' campioni, ma variava pure in commercio per la imperfettissima maniera di *campionare* le misure, onde molto differenti fra loro erano le *mezzecanne* usate da' mercanti, quantunque tutte *bollate*.

L' unità di superficie, ossia quella che serve a valutare l' estensione o grandezza de' terreni si chiama *moggio*. il quale ha 30 *passi* di lunghezza ed altrettanti di larghezza, essendo ogni passo lungo palmi $7\frac{1}{3}$. Il passo che regola le misure agrarie è dunque diverso dal passo itinerario, che si compone di soli 7 palmi. Il moggio si suol considerare anche diviso in 10 parti eguali delle *quarte*. *Ogni quarta* si divide in nove *none*, ed ogni *nona* in cinque *quinte*. E poichè il moggio si compone di $30 \times 30 = 900$ passi quadrati, ossia di $30.7\frac{1}{3} \times 30.7\frac{1}{3} = 220 \times 220 = 48400$ palmi quadrati, la *quarta* equivale a 90 passi quadrati, ovvero a 4840 palmi quadrati, la *nona* vale 10 passi quadrati, ossiano $537\frac{7}{9}$ palmi quadrati, e la *quinta* vale 2 passi quadrati, pari a $107\frac{5}{9}$ palmi quadrati.

Le misure pe' liquidi sono diverse per l' olio, e per il vino. L' unità di misura dell' olio è lo *staio* che corrisponde ad un peso di *rotoli* $10\frac{1}{3}$; esso si divide in 16 *quarti*, ed ogni quarto si divide in 6 *misurelli*. Sedici staia formano una *salma*, che equivale perciò al peso di rotola $165\frac{1}{3}$. L' unità di misura del vino è il *barile* che contiene 60 *caraffe*. Dodici barili formano una *botte*, e due botti formano un *carro*.

L' unità di misura per gli aridi, come il grano o le biade di ogni genere, è il *tomolo*, che si divide in 4 *quarte*, o in 24 *misure*.

L' unità di misura per valutare la quantità della legna da bruciare è un volume (parallelepipedo) lungo 8 palmi, largo 8 palmi ed alto 4 palmi, detto *canna da legna*.

La *canna di costumanza*, usata dagli architetti per misurare le fabbriche, è un volume (parallelepipedo) lungo 8 palmi, largo 8 palmi ed alto 2 palmi.

L'unità di peso è il *rotolo* per la maggior parte de' generi che si contrattano a peso; il rotolo si divide in 1000 *trappesi* ed equivale ad *once* $33\frac{1}{3}$, dimodochè 100 once formano 3 rotoli. Cento rotoli formano un *cantaio*.

Per alcuni generi si usa la *libbra* composta di 12 once (eguali a quelle

del rotolo); l' oncia si divide in 10 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli* o trappesi (eguali a quelli del rotolo), il trappeso in 20 *acini* o *grani*.

La calce si valuta con una unità detta in commercio *peso*, che equivale a 40 rotoli.

Condizioni generali di un sistema metrico.

§ 261. Se i pesi e le misure fossero gli stessi presso tutte le nazioni, qualunque potesse essere il loro ordinamento, sarebbe stranezza il farvi la più piccola innovazione, e tutta la cura pe' governi dovrebbe anzi consistere nel mantenerli immutabili. Ma sventuratamente le misure variano da uno Stato ad un altro non solo, ma da un comune ad un altro dello stesso Regno, e questa varietà è di così grave danno al commercio, che in tutti i tempi i governi illuminati hanno procurato di ridurre ad un sistema unico almeno i pesi e le misure de' popoli soggetti alla loro amministrazione, ordinandolo in modo che fosse in chiara o facile relazione con quelli delle altre nazioni. Discutiamo brevemente le condizioni alle quali deve adempire un sistema di pesi e misure per corrispondere allo scopo cui è destinato, cioè di assicurare e promuovere il commercio interno ed esterno di un paese.

La buona fede delle contrattazioni vuole che le misure ed i pesi in esse adoperati siano pienamente conosciuti da' contraenti, e che costoro abbiano inoltre la piena certezza della loro invariabilità. Un forestiero che non conoscesse la precisa quantità del *tomolo*, o che potesse dubitare che il tomolo attuale fosse diverso da quello in altra epoca a lui noto, non si deciderebbe certo facilmente a commerciare di cereali col nostro paese. La *prima* ed indispensabile condizione che debbono avere i pesi e le misure di uno Stato è perciò quella di essere legalmente stabiliti, e determinati con somma precisione nella loro quantità per mezzo di campioni ottimamente costrutti, e sulla conservazione de' quali vegli la pubblica autorità.

I pesi e le misure di uno Stato non formano però un *sistema*, se non derivano tutti con rapporti semplici e chiari dalla unità di misura lineare. Questa *seconda* condizione, quantunque non essenziale come la prima, è necessaria perchè agevola sommamente la perfetta conoscenza delle misure, e la rettificazione e costruzione dei campioni, che si alterano e logorano col tempo. Sarà facile, per esempio, a chiunque di formarsi un' idea esatta del *tomolo* napolitano se si dirà, *il tomolo è tre palmi cubici*, cioè un parallelepipedo che ha un palmo di lunghezza un palmo di larghezza e tre palmi di altezza (§. 221); ma non così se si dirà, *il tomolo è tre palmi cubici e $\frac{9}{400}$ di palmo cubico*. Similmente, la costruzione o la rettificazione di un campione del tomolo sarà immensamente più facile, se si tratterà di farlo eguale a tre palmi cubici piuttosto che a palmi cubici $3\frac{9}{400}$: e sarà dato anche ad ognuno di poter verificare la giustezza delle misure in commercio se per legge il loro valore è determinato mediante rapporti molto semplici con l' unità lineare, siccome può dirsi del tomolo equivalente a 3 palmi cubici.

Un *sistema* di pesi e misure può fondarsi sopra un' unità lineare che abbia un rapporto semplice con altra misura molto conosciuta nell'estero, come il *metro* o la *tesa*, piuttosto chè sopra una unità puramente arbitraria e convenzionale. Questa *terza* condizione di cui può godere un sistema di pesi e misure, quantunque non essenziale come la prima e meno importante della seconda, non cessa però di avere una grande utilità nel commercio esterno; perocchè stabilisce una facile e chiara relazione fra le misure di un paese, e quelle delle altre nazioni, e quindi assicura ed agevola il commercio fra Stato e Stato. Che se inoltre l'unità lineare fosse aliquota di qualche misura itineraria, dipendente con chiaro rapporto dalla grandezza della Terra che abitiamo, allora il *sistema metrico* appoggiandosi ad un modello invariabile preso nella natura, avrebbe il vantaggio di legare fra loro con progressiva derivazione tutte le misure grandi e piccole, servirebbe agli usi comuni non meno che agli usi scientifici, e specialmente della Geodesia, e della Statistica, ed acquistando così maggiore stabilità, se pure col volger del tempo venisse alquanto a variare, potrebbe esser ricondotto facilmente ai suoi veri principii.

Finalmente la *quarta* ed ultima condizione di un sistema metrico potrebbe essere la divisione e suddivisione *decimale* de' pesi e delle misure. Questa condizione rende più facili i calcoli del commercio e sotto tale rapporto è molto da pregiarsi, ma è evi-

dente che non ha nè può avere l'importanza delle precedenti; onde s'ingannano alcuni che nella divisione decimale fanno quasi tutta consistere la perfezione di un sistema metrico. Aggiungasi che la divisione decimale si oppone spesso alle abitudini del popolo nel piccolo commercio, le quali senza un potente motivo di bene pubblico, non vogliono essere contrariate. E questa opinione è così giusta, che per essa, come accenneremo fra poco, non ha potuto sostenersi la nuova divisione decimale del *cerchio* (*), malgrado che servisse di fondamento al sistema metrico decimale francese, opera altronde perfetta nel suo genere.

Riassumendo, siccome i pesi e le misure non possono essere gli stessi presso tutte le nazioni, è necessario che siano uniformi almeno in tutto uno Stato; le misure di uno Stato riusciranno poi di maggior vantaggio al suo commercio interno ed esterno, 1.° allorchè saranno definite e mantenute legalmente e non per semplice tradizione, 2.° se deriveranno tutte dall' unità lineare con rapporti semplici e chiari, 3.° se questa unità principale venga, in certo modo, a contatto con quelle delle altre nazioni, serbando un rapporto semplice e chiaro con qualche misura generalmente conosciuta, e quando fosse possibile, anche colla misure terrestri, 4.° se la divisione e suddivisione delle misure sarà decimale.

Del sistema metrico decimale francese.

§. 262. Verso la fine del passato secolo il governo di Francia incaricò una commissione di scienziati della riforma delle misure di quel paese, il quale forse più degli altri stati di Europa abbondava di misure di ogni genere tutte diverse fra loro. Quei grandi uomini, non contenti di dare alle misure francesi le prime due indispensabili condizioni di cui si è parlato nel § precedente, per soddisfare alla terza, si occuparono di stabilire l'unità lineare in modo da renderla comune non solo alla Francia ma, se fosse stato possibile, anche a tutte le altre nazioni; ed a tal fine, in vece di desumerla da qualche misura lineare già esistente, e molto conosciuta come la *tesa*, immaginarono di derivarla immediatamente dalla lunghezza del quarto di *meridiano terrestre*, siccome da un campione naturale e comune a tutti, di maniera che non venisse offeso nella scelta l'amor proprio di alcuna nazione (**). Per dare al sistema metrico ogni perfezione, fu adottata pure la divisione e suddivisione decimale delle misure, onde la misura fondamentale detta *metro*, *misura* per eccellenza, risultò dalla divisione della lunghezza del *quadrante terrestre* in 10 000 000 di parti eguali.

§. 263. Dall' unità di misura lineare, chiamata *metro*, sono nel sistema metrico francese dedotte tutte le altre misure, itinerarie, di superficie, di capacità, e di peso; e per indicare i multipli ed i summultipli decimali delle misure si fece uso di una nomenclatura sistematica derivata dal greco e dal latino come, *miria*, *chilo*, *ecato*, *deca*, *deci*, *centi*, *milli*, le quali voci equivalgono rispettivamente a *decina di migliaia*, *migliaio*, *centinaio*, *decina*, *decimo*, *centesimo*, *millesimo*. Tutti i particolari del sistema metrico decimale francese veggonsi registrati nel seguente quadro.

(*) Si chiama *cerchio* una figura geometrica terminata da una linea curva che dicesi *circonferenza*, di cui ogni punto è egualmente distante da un punto interno della figura detto *centro*: la forma del cerchio è quella che nel linguaggio comune si chiama *rotonda*. La circonferenza del cerchio si suppone divisa in parti eguali chiamate *gradi*. il grado si divide in *minuti*, ed il minuto in *secondi*. Da tempo immemorabile la circonferenza del cerchio si è divisa in 360 gradi, il grado in 60 minuti ed il minuto in 60 secondi. La quarta parte della circonferenza, che contiene 90 gradi, si chiama *quadrante*. Un dato numero di gradi, di minuti e di secondi, per esempio, 35 gradi, 27 minuti e 37 secondi, si scrivono così, $35°. 27': 37''$:

Quanto rimane a dirsi in questi Elementi suppone nel lettore alcune cognizioni di Geometria e di Fisica dalle quali non potrebbe prescindersi in nessun modo. Ma lo studio dell' Aritmetica accompagna necessariamente quello di tutte le altre parti del corso matematico, che per riuscire utile deve sempre discendere sino ai numeri, con rare eccezioni.

(**) Il meridiano terrestre è un cerchio *massimo* della Terra, e quindi la sua circonferenza è il più gran giro circolare che si possa fare intorno al globo, ed è lunga 21600 miglia.

QUADRO GENERALE

Del sistema metrico decimale francese.

NOMI SISTEMATICI	VALORI
MISURE DI LUNGHEZZA	
***Miria**metro*	Diecimila metri.
*Chilo*metro.	Mille metri.
*Etto*metro	Cento metri.
*Deca*metro	Dieci metri.
METRO	*Unità fondamentale de' pesi e delle misure;* diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre (*).
*Deci*metro	Decimo del metro.
*Centi*metro.	Centesimo del metro.
*Milli*metro.	Millesimo del metro.
MISURE AGRARIE	
*Ett*ara.	Cento are, o 10000 metri quadrati.
ARA.	Cento metri quadrati; quadrato di dieci metri di lato (**).
*Centi*ara	Centesimo dell'ara, o metro quadrato.
MISURE DI CAPACITÀ	
pe' liquidi e per gli aridi	
*Chilo*litro.	Mille litri.
*Etto*litro.	Cento litri.
*Deca*litro.	Dieci litri.
LITRO.	Decimetro cubo (***).
*Deci*litro	Decimo del litro.

(*) Si veggano le precedenti due ultime note.

(**) Una superficie larga dieci metri e lunga dieci metri in quadro.

(***) Un volume, a forma di dado, lungo un decimetro, largo un decimetro e profondo un decimetro.

NOMI SISTEMATICI	VALORI
MISURE DI SOLIDITÀ	
*Deca*stéro.	Dieci stéri.
STÉRO.	Metro cubo.
*Deci*stéro	Decimo dello stéro.
PESI	
. . . .	Mille chilogrammi, peso del metro cubo d'acqua e della tonellata di mare.
. . . .	Cento chilogrammi, quintale metrico.
CHILOGRAMMO.	Mille grammi. Peso nel vuoto di un decimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi del termometro centigrado (*).
*Etto*grammo.	Cento grammi.
*Deca*grammo	Dieci grammi.
GRAMMO	Peso di un centimetro cubo di acqua a 4.° centigradi.
*Deci*grammo.	Decimo del grammo.
*Centi*grammo.	Centesimo del grammo.
*Milli*grammo	Millesimo del grammo.
MONETE	
FRANCO	Cinque grammi d' argento al titolo di $\frac{9}{10}$ di fino.
Decimo	Decimo del franco.
Centesimo	Centesimo del franco.

(*) Il *termometro* è un istrumento che serve a misurare la *temperatura*, o il grado di calore de' corpi. E siccome i corpi crescono o diminuiscono di volume crescendo o diminuendo il loro grado di calore, così fu stabilito invariabilmente il calore dell'acqua che dovea servire a determinare l'unità di peso, affinchè nel decimetro cubo se ne contenesse sempre la stessa quantità. L'acqua si volle anche *distallata*, perchè con la *distallazione* essa vien depurata di tutte le sostanze estranee, e riesce sempre della medesima qualità.

Sistema metrico del Regno secondo la legge del 6 aprile 1840.

§. 265. Le misure di Napoli esposte nel §. 260 non sembrano legate fra loro e ordinate in modo da formare un sistema, ma il fu Generale Visconti in una sua dotta memoria, presentata alla Reale Accademia delle scienze nel 1828, dimostrò che, sia tenendosi strettamente alla definizione del palmo napolitano data dagli antichi archi-

---

adottati senza grave discapito della navigazione e del commercio. Si conchiuda da ciò, e da quanto si è detto più sopra, che fra le misure itinerarie ed il grado terrestre, e fra il grado e l'ora, devono sussistere rapporti semplici e chiari; e questo accordo fra le divisioni delle tre unità naturali, la *lunghezza del meridiano terrestre*, il *cerchio*, ed il *giorno*, interessa la società non meno che gli scienziati.

Gli autori del sistema metrico francese per rimuovere la difficoltà non mancarono di proporre la divisione decimale del tempo; il giorno fu diviso in 10 ore, l'ora in 100 minuti, e il minuto in 100 secondi. Ma troppo malagevole era lo scuotere una convenzione sociale adottata da tempo immemorabile presso tutti i popoli inciviliti, come l'attuale divisione del giorno. Altronde il principale inconveniente che fa sentire la necessità di una riforma nelle misure essendo la loro varietà, quando una misura è divenuta generale cessa il bisogno di mutarla, e cresce oltremodo la difficoltà di eseguire tal cambiamento; perocchè gli uomini, i quali resistono anche alle utili novità trattandosi di rinunziare a' loro usi, non saprebbero accettare un cambiamento la cui utilità sarebbe per essi inconcepibile, siccome quella che dipende unicamente da alti concetti scientifici. Quindi, malgrado che a Parigi si fossero costrutti orologi a tempo decimale, e che gli scienziati francesi avessero nelle loro opere introdotta la divisione decimale del tempo, nessun astronomo o matematico straniero mostrò d'incaricarsi di questa innovazione.

Esclusa la divisione decimale del tempo, la divisione decimale del cerchio che con essa aveva relazione, non potè sostenersi, e si rivenne all'antica sessagesimale, la quale trovavasi già di accordo con le principali misure itinerarie delle più colte nazioni. La *lega* francese di 25 a grado per le misure terrestri e di 20 a grado per le marine, il *miglio* tedesco di 12 o di 15 a grado, e più di tutto il *miglio italiano di 60 a grado* equivalente al *miglio marino*, presentavano una riduzione facile ed immediata delle misure di lunghezza in minuti di cerchio massimo terrestre e viceversa; e l'uso generale del miglio geografico o marino rendeva altronde inutile, e quasi impossibile qualunque cambiamento: per la qual cosa le misure itinerarie che dovevano la loro origine alla divisione sessagesimale del quarto di meridiano terrestre contribuirono anche potentemente a sostenerla.

Da quanto precede apparisce che il sistema metrico francese non gode più della essenzialissima proprietà di legare tutte le misure al grado terrestre col quale le misure itinerarie debbono avere un facile ed immediato rapporto, onde si può dire che quel sistema non ha più misure itinerarie. Se avesse potuto introdursi la divisione decimale del tempo, nessun sistema più perfetto che il francese; ma dovendo reggere l'antica divisione del tempo e del cerchio, non sarebbe stata per avventura da preferirsi alla diecimillionesima parte del quadrante terrestre la millesima parte del miglio da 60 al grado; ossia alla millesima parte del minuto decimale la millesima parte del minuto sessagesimale? Questa nuova tesa, che poco allontanavasi dall'antica, e corrisponde propriamente al passo itinerario napolitano, avrebbe adempito a tutte le condizioni, perchè stabiliva un perfetto accordo fra la divisione della lunghezza del meridiano terrestre e le divisioni delle altre due unità naturali già esistenti ed immutabili.

Ma il sistema metrico francese, per la solennità e l'esattezza con la quale furono stabilite le sue misure, sarà sempre il sistema metrico scientifico, il linguaggio universale in cui debbono tradursi le misure di ogni altro paese quando si vuol essere intesi dovunque. Ed a questo felicissimo risultamento contribuì anche non poco il concorso degli scienziati stranieri in quella grande operazione, ed il paragone diligentissimo che fu fatto delle nuove misure con le principali antiche misure europee.

tetti è passata in tradizione, cioè che *il palmo è la settemilesima parte del miglio*, le misure di Napoli derivano tutte con rapporti semplicissimi da quella unità lineare. Avventurosamente questa unità essendo aliquota del miglio (geografico lo è pure del quarto del meridiano terrestre, dimodochè le misure di Napoli non solo formano sistema, ma sono legate con rapporti semplici e chiari alle misure itinerarie ed al grado sessagesimale del meridiano terrestre, e godono di tutte le condizioni di un buon sistema metrico indicate nel §. 261, eccettuata l'ultima di minore importanza relativa alla divisione decimale, che pure in qualche misura si vede chiaramente accennata.

Il Generale Visconti fu il primo a disotterrare, per così dire, e porre in luce questo monumento dell'antica nostra civiltà; egli fondò il suo lavoro sulle esperienze eseguite dalla commissione di pesi e misure del 1811, e per maggiore accertamento molte di quelle esperienze essendo state ripetute nel 1832, i risultamenti del Visconti rimasero confermati. Dietro queste indagini egli esprimeva il desiderio che le misure di Napoli, nuovamente definite e riordinate in sistema, fossero legalmente stabilite, ed estese ancora a tutte le provincie di quà del faro, e solo apportava una leggiera alterazione al moggio per renderlo aliquota del miglio quadrato. Dopo qualche anno, approfittando di una dotta opposizione, migliorò notabilmente il suo primo *progetto*, come si legge nell'opera *Del sistema metrico della città di Napoli* pubblicata nel 1838.

Nelle sue ricerche il Visconti si propose sempre di rispettare scrupolosamente gli usi esistenti, ma il ch. sig. Commendatore Afan de Rivera, prendendo parte alla controversia, credette che non fosse stato difficile introdurre qualche utile innovazione, diretta specialmente a render più semplice il sistema ed a stabilire possibilmente la divisione decimale, siccome apparisce dalla sua opera intitolata, *Della restituzione del nostro sistema di misure pesi e monete alla sua antica perfezione* (*).

§. 266. Rischiarata pienamente la quistione da questi importanti lavori, fu matura nei consigli del governo e poscia si proclamò la legge del 6 Aprile 1840. Ecco le disposizioni della legge.

« 1.° La base del sistema metrico è il *palmo*, settemilesima parte di « un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre, ovvero « settemilesima parte del miglio geografico d'Italia o miglio nautico di « sessanta al grado. Esso sarà diviso in parti decimali, e dieci palmi « costituiranno una *canna*.

« La canna lineare, la canna quadrata, e la canna cuba sono le unità « di misura di lunghezza, di superficie, e di solidità per tutti gli usi. « La prima è uguale a 10 palmi lineari, la seconda a 100 palmi qua- « drati, e la terza a 1000 palmi cubi »

La canna dunque di 8 palmi è abolita, ma il palmo rimane lo stesso, per cui il rapporto fra la nuova e l'antica canna è tanto semplice che il cambiamento non può produrre alcuno inconveniente; in ogni caso si potrà contrattare a palmi sino a che non si comprenderà bene il valore della nuova misura.

Il quadrante terrestre contiene 90 gradi, ovvero 5400 minuti, essendo il grado composto di 60 minuti; ma ogni minuto contiene 7000 palmi, dunque il quarto del meridiano terrestre contiene $5400 \times 7000 = 37800000$ palmi, e poiche lo stesso quadrante si compone di 10000000 di metri, se ne conchiude che 37800000 palmi equivalgono a 10000000 di metri. Quindi,

« Rapporto col sistema metrico decimale: 100 metri uguagliano 378 « palmi; onde un palmo è uguale a metri 0,26455.

(*) Leggiere modificazioni non turbano le abitudini del popolo, ma interi cambiamenti ridurrebbero ad un vero flagello l'atto governativo che li comandasse, quantunque avesse per oggetto il bene del popolo stesso, ed il vantaggio del suo commercio.

« 2.° L'unità superficiale delle misure agrarie sarà il *moggio* di 10000 « palmi quadrati, o sia un quadrato che abbia per lato 100 palmi, o « canne 10. Esso sarà diviso in parti decimali ».

La legge sostituisce saggiamente questo nuovo *moggio* alle innumerabili misure agrarie di diverso nome e di diversa grandezza usate sinora nel Regno, poichè tutte queste misure potendo essere espresse in palmi quadrati, facilissima riesce la loro riduzione in moggia nuove. Per esempio, il moggio della città di Napoli è un quadrato che ha per lato palmi $30\times7\frac{1}{3}=220$ (§. 260), per cui equivale a palmi quadrati $220\times220=48400$, e quindi a moggia nuove 4,84. Così pure il moggio di Nola corrisponde a moggia nuove 5,76, perchè è un quadrato il cui lato è lungo 30 passi ciascuno di palmi 8, cioè palmi $30\times8=240$, onde un tal moggio si compone di palmi quadrati $240\times240=57600$. Aggiungeremo che non vi è mezzo più semplice di paragonare fra loro le moltiplici misure agrarie esistenti, che valutandole tutte in palmi quadrati, e quindi in moggia nuove.

Un miglio quadrato equivale a 4900 moggia nuove, perchè contiene $7000\times7000=49000000$ di palmi quadrati.

« 3.° Il *tomolo* è l' unità delle misure di capacità per gli aridi. Esso « equivale a tre palmi cubi, e si divide in 2 *mezzette* o in 4 *quarte*, o pu- « re in 24 *misure*, ciascuna delle quali eguaglia il cubo del mezzo palmo. « La misura degli aridi sarà praticata sempre a *raso* e non a *colmo* »

« 4.° Il *barile* è l' unità di misura di capacità per alcuni dei liquidi, « come il vino, l'aceto, l'acqua etc., e si divide in 60 *caraffe*. Esso « equivale ad un cilindro retto del diametro di un palmo, e di tre palmi « di altezza (*) ».

« La *botte* si compone di 12 barili; ed è perciò eguale ad un cilindro « retto di tre palmi di diametro e quattro palmi di altezza ».

« 5.° L' olio sarà misurato sempre a peso, a cantaia cioè, a rotola ed « a frazioni di rotolo. Pel commercio a minuto potrà misurarsi a capaci- « tà: le misure dovranno essere di figura cilindrica, e corrispondenti al « peso di olio che debbono contenere alla temperatura di 20 gradi del « termometro centigrado ».

Lo *staio* e la *salma* rimangono dunque aboliti, e si sostituiscono ad essi i pesi di 10 rotoli e di 100 rotoli. Questa novità non dovrà produrre alcuno imbarazzo, perchè nel piccolo commercio l'olio si comprava già indifferentemente a rotola o a staia, e nel commercio in grande la riduzione delle salme in cantaia sarà facilissima pei negozianti. Una salma contenendo rotoli $105\frac{1}{3}$, ed un cantaio rotoli 100, si avrà che,

$$1\ \textit{salma}:1\ \textit{cantaio}::165\tfrac{1}{3}:100::496:300\ ;$$

quindi 300 salme corrispondono a 496 cantaia, ovvero 75 salme a 124 cantaia.

Per ridurre un numero qualunque di salme a cantaia si può usare un procedimento molto semplice. Siccome dovrebbe moltiplicarsi il dato numero per 496 e dividere il prodotto per 300, sarà lo stesso che eseguire la moltiplicazione per $\frac{500}{300}$, ossia per $\frac{5}{3}$ e sottrarre da questo prodotto quello del dato numero per $\frac{4}{100}$, ossia la centesima parte del prodotto per $\frac{4}{3}$. Per esempio, dovendo ridurre 726 salme a cantaia, si ag-

(*) Si chiama *cilindro* quel solido che nasce dalla rotazione di un rettangolo intorno ad uno de' suoi lati mantenuto immobile; il diametro del cilindro è doppio del lato girevole del rettangolo, e l' altezza eguaglia il lato fisso. Il cilindro ha la figura di un ordinario bicchiere da tavola.

giungerà a 726 la sua terza parte 242, e si avrà 968, a questo numero si aggiungerà di nuovo 242 e si otterrà 1210, e da questa seconda somma si toglierà la centesima parte di 968 cioè 9,68, e si avrà per ultimo risultamento 1200,32. Allo stesso modo si troverà che 425 salme equivalgono a cantaia $702,60\frac{2}{3}$, come qui appresso.

726	425
242	$141\frac{2}{3}$
968	$566\frac{2}{3}$
242	$141\frac{2}{3}$
1210	$708,33\frac{1}{3}$
9,68	$5,66\frac{2}{3}$
1200,32	$702,66\frac{2}{3}$

« 6.° Il *rotolo* è l' unità di misura de' pesi, e si dividerà in parti de« cimali: la sua millesima parte è il *trappeso*. Il *cantaio* si compone di « 100 rotola ».

« Rapporto col sistema metrico decimale: un rotolo è uguale a chilo« grammi 0,890997 ».

« Un palmo cubo di acqua distillata pesa in Napoli, nell'aria, rotola « 20 e 736 trappesi alla temperatura di gradi 16,144 del termometro « centigrado (12,92 di Reaumur), e sotto la pressione barometrica di « palmi 2,865 ossia di 28 pollici ($0,^{met}76$) ».

L' antica divisione del rotolo in *once* $33\frac{1}{3}$ è dunque abolita, ma non sarà difficile la conversione delle once, dramme etc. in frazioni decimali del rotolo; un'*oncia* equivale al peso di 4 *centesimi*, una *dramma* a 3 trappesi o *millesimi*, e due *acini* o *grani* equivalgono ad un decimo di trappeso ossia ad un *diecimilesimo* (§. 175). La metà di un rotolo si comporrà di 5 decimi, $\frac{1}{4}$ di rotolo di 2 decimi e 5 centesimi, e $\frac{3}{4}$ di rotolo di 7 decimi e 5 centesimi.

Questo articolo della legge presenta due determinazioni del rotolo, una facendolo derivare dal palmo con valutare in rotoli il peso di un dato volume di acqua distillata, l' altra col paragone immediato al chilogramma francese. Or se un palmo cubo di acqua distillata pesata nelle condizioni sovra esposte vale rotoli 20,737, mille palmi cubi di acqua distillata corrisponderanno a 20736 rotoli, ed $\frac{1}{1728}$ di questo volume d' acqua peserà

$$\frac{20736}{1728}=12 \text{ rotoli; ma } \frac{1000}{1728}=\frac{10}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6},$$

cioè un volume di mille palmi cubi diviso per 1728 equivale al cubo di $\frac{5}{6}$ di palmo. dunque;

« *Un volume d' acqua distillata corrispondente al cubo di* $\frac{5}{6}$ *di palmo* « *pesato in Napoli nell'aria, alla temperatura di* $16^{\circ}\frac{1}{6}$ *centigradi*$=12^{\circ}\frac{14}{15}$ « *di Reaumur* (*), *e sotto la pressione barometrica di 28 pol., equivale a* 12 « *rotoli* ».

(*) Questa temperatura differisce $\frac{1}{42}$ di grado centigrado soltanto da quella riportata nella legge, ed abbiamo creduto doverla preferire perchè, sotto una espressione più semplice, serve forse meglio a stabilire l' esatta corrispondenza fra il valore 0,890997 assegnato al rotolo in parti del chilogrammo, ed il peso dell' indicato volume d' acqua distillata, calcolato nelle supposte condizioni su i dati di Fisica più recenti ed accreditati.

Con questo rapporto più semplice, dato dal Generale Visconti a pagina 59 della citata sua opera *Del sistema metrico etc.*, sarebbe facile a chiunque di trovare la quantità del rotolo con sufficiente approssimazione.

« 7.° Sarà tollerato per ora, e sino a nuova disposizione, che per i « soli usi farmaceutici sia adoperato il peso della *libbra* colle attuali sud- « divisioni ».

La libbra è dunque abolita, ma non potendo abbandonarsi immediatamente l'uso di contrattare alcuni generi a libbre, si sostituirà al peso di una libbra quello di 36 centesimi di rotolo, ossiano 3 decimi e 6 centesimi; mezza libbra corrisponderà a 18 centesimi ed $\frac{1}{4}$ di libbra a 9 centesimi.

Del passo geodetico.

§. 267. Fin dal 1815 il Generale Visconti, propose per unità di misura nei lavori geodetici il *passo*, millesima parte del miglio di 60 a grado, ed eguale a sette palmi napoletani. Questa misura adottata con superiore approvazione, e divisa in parti decimali offre molti vantaggi. Per essa le grandi distanze valutate con esattezza sino alle minime quantità, possono immediatamente cambiarsi in miglia, secondo l'uso generale d'Italia, col semplice trasporto della virgola di tre luoghi a sinistra; così 34564,55 passi equivalgono a miglia 34,56455. Il passo ha inoltre col grado terrestre l'immediato rapporto di cui godeva in origine il metro, sussistendo la divisione decimale del cerchio, poichè un numero qualunque di passi si cambia in minuti del meridiano quando si riduce in miglia; e questa proprietà del passo dipende da che esso è derivato dal meridiano terrestre con la divisione sessagesimale, precisamente come il metro con la divisione decimale, uno essendo la millesima parte del minuto sessagesimale, e l'altro la millesima parte del minuto decimale nota a pag. 153 (*). Ed è da avvertirsi che il passo ed il palmo non sarebbero aliquote del quadrante terrestre, come il metro, se non fossero dedotti dal minuto del grado *medio* del meridiano, secondo prescrive la Legge (§. prec.). Imperciocchè, si sa che per la sferoidicità terrestre tutti i gradi non hanno la medesima lunghezza alle varie latitudini, e quindi una misura aliquota di un grado particolare non potrebbe esserlo dell'intero quadrante, che è la somma di 90 gradi tutti diversi fra loro; laddove al contrario una misura aliquota del grado *medio aritmetico* de' novanta gradi disuguali, è necessariamente aliquota della loro somma, ossia del quadrante terrestre. Per questa ragione gli autori del sistema metrico francese, nello stabilire l'unità fondamentale, non considerarono la lunghezza di alcun grado particolare di meridiano, ma cavarono il metro dall'intera lunghezza del quadrante, e con ciò vennero a desumerlo dal grado medio decimale. La legge del 6 Aprile, imitando il procedimento di quei grandi uomini ha dedotto in vece il palmo dal *grado medio* sessagesimale, perchè importava ritto farlo

(*) Il sig. *Jomard* della società geografica di Parigi ha proposto, non ha guari, di indicare l'altezza delle montagne con minuti e secondi di grado terrestre, ad oggetto di stabilire una uniformità nell'espressione delle tre coordinate di un punto, LONGITUDINE, LATITUDINE ed ALTITUDINE. Questa idea, lodevole per lo scopo cui mira, ha però due inconvenienti; l'altezza non è un arco, e sarebbe snaturata esprimendola in minuti e secondi; e di più le altezze così espresse non potrebbero scriversi sulle carte geografiche, perchè occuperebbero troppo spazio, essendo necessario il luogo di sette cifre per le altezze maggiori di un miglio, come 1′.10″,34. Il sistema adottato fin dal 1815 nel R. Officio Topografico di Napoli di esprimere le altezze in passi geodetici, ha il pregio della proposta del sig. *Jomard*, senza gl'inconvenienti; perocchè i passi, come parti millesime del minuto terrestre, sono misure lineari e geografiche ad un tempo, e la scrittura di qualunque altezza non oltrepassa mai quattro cifre.

Ci si permetta qui di far notare che la proposizione del sig. *Jomard* giustifica pienamente ciò che abbiamo detto di sopra del sistema metrico francese, cioè che esso non gode più della essenzialissima proprietà di legare tutte le misure al grado terrestre. Se le latitudini e longitudini geografiche avessero potuto esprimersi in gradi e minuti decimali, siccome fra il metro e quelle unità esisteva la medesima relazione che fra il passo napolitano ed il minuto terrestre sessagesimale, la proposta del geografo francese sarebbe stata oziosa.

corrispondere all'antica sua definizione di *settemilesima parte del miglio*; e per conseguenza necessaria il palmo è poi risultato aliquota del quadrante terrestre. Ogni altra maniera di derivare il passo ed il palmo dalle misure terrestri sarebbe stata irregolare.

Intanto il passo di cui si fa uso nel Real Officio Topografico di Napoli fu sin dal 1822 dedotto per maggiore esattezza dalla determinazione del quadrante terrestre data dal Delambre, e generalmente adottata in Europa nelle operazioni geodetiche, prima delle ultime investigazioni del celebre *Bessel*. Secondo i calcoli di Delambre, posteriori allo stabilimento in Francia del metro legale, il quarto di meridiano si compone di 10000724 metri legali, e poichè il quadrante contiene 5400 minuti, ed il passo geodetico è la millesima parte del minuto, per ottenere la lunghezza del passo espressa in metri, bisognerà dividere 10000724 per 5400 e per 1000, ossia per 5400000, e si avrà,

1 *passo geod.* = 1 *met*, 851985926.

Questo valore è un poco più grande di 7 palmi legali napoletani, perchè la legge, per rendere il palmo indipendente dalle piccole variazioni cui potrà ancora andar soggetta la lunghezza del quadrante terrestre in conseguenza di nuove misure, ha voluto porlo in esatta corrispondenza col metro legale, non incaricandosi della correzione di Delambre. La differenza fra il passo geodetico e 7 palmi napolitani è però affatto insensibile, non solamente negli usi civili, ma anche nelle operazioni topografiche, e si avverte soltanto nelle delicate operazioni geodetiche, ed atteso il grado di perfezione delle conoscenze attuali sulla figura e grandezza della Terra, si può con sicurezza asserire che qualunque nuova rettificazione non potrà mai avere alcuna influenza sulla lunghezza del metro e del palmo legale negli usi del commercio. Un palmo legale essendo eguale a 0^{met},26455026455..., sette palmi equivalgono a metri 1,85185185, e differiscono dal passo geodetico determinato di sopra per 0^{met},000134; questa piccolissima differenza fra le due misure si avvertirebbe con mezzi delicati quando i corrispondenti campioni fossero stati costrutti con molta esattezza, e divisi alla medesima temperatura; ma un campione di ottone di sette palmi legali diviso alla temperatura di 0 gradi di Reaumur acquisterebbe l'esatta lunghezza del passo geodetico alla temperatura di soli $3°\frac{1}{4}$.

Nell'*Appendice* di quest'opera si troveranno alcune tavole di riduzione per agevolare agli stranieri la conoscenza delle nostre misure, ed ai nostri la cognizione delle misure straniere; e fra le misure itinerarie, il miglio si è fatto eguale a 1000 passi geodetici, e la lega francese di 25 a grado a 2400 passi, cioè il miglio a 1851*met*, 9859 e la lega a 4444*met*, 7662.

Sistema metrico di Sicilia.

§. 268. Con una Legge del 31 Dicembre 1809 le misure di Sicilia furono ordinate e definite come segue.

Il *palmo*, unità di lunghezza, si divide in 12 *once*, l'oncia in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. Una *canna* è eguale ad 8 palmi.

Il *miglio* equivale a 5760 palmi, e si compone di 45 *corde*: la corda contiene 4 *catene* e la catena 4 canne.

La Legge non diede il rapporto fra il palmo ed il metro, per cui rimaneva qualche incertezza su questo punto. Il Generale Visconti dietro l'esame di alcuni campioni, ed incaricandosi ancora de' rapporti dati dal P. Piazzi, dal signor Cacciatore, e da altri, conchiuse che il palmo siciliano corrispondeva a $\frac{40}{41}$ del nostro palmo, ossia a $\frac{40}{41}$ di 0^{met},26455.... e quindi a 0^{met},258098. Questo valore, ed il rapporto col palmo legale napolitano da cui deriva, sono stati confermati da un confronto diretto eseguito da noi del campione originale del palmo siciliano (che si conserva dalla commissione de' pesi e misure di Palermo) con la eccellente scala campione di *Trauglon* posseduta dal R. Officio Topografico di Napoli (*).

(*) Veggasi la *Notizia intorno al palmo siciliano* inserita nel Rendiconto della R. Accademia delle scienze di Napoli n.° 13.

L'unità delle misure agrarie è la *salma*, che è un quadrato avente per lato 64 canne: la salma si divide in 4 *bisacce*, la bisaccia in 4 *tomoli*, il tomolo in 4 *mondelli*, il mondello in 4 *carozzi*, il carozzo in 4 *quarti*, per cui il quarto risulta di 4 canne quadrate.

La misura di capacità per gli aridi è il *tomolo* equivalente ad un palmo cubo; si divide in 4 *mondelli*, ed il mondello in *carozzi*, *quarti* e *quartigli*, sempre di 4 in 4. Sedici tomoli formano una *salma*.

La misura di capacità pe' liquidi è il *quartaro*, che è pure uguale ad un palmo cubo; si divide in 20 *quartucci*, il quartuccio in 2 *caraffe*, la caraffa in 2 *bicchieri*. Due quartari formano un *barile*, e 32 barili una *botte*.

L'unità di peso è il *rotolo* che corrisponde ad un quartuccio di olio d'oliva puro e lampante pesato a Palermo nell'aria, alla temperatura di 64° di Fahrenheit, ossia di $14\frac{2}{9}$ di Reaumur; si divide in 30 *once*, l'oncia in 8 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 20 *grani*, il grano in 8 *ottavi*. La libbra è di 12 once, ed il cantaio di 100 rotoli.

Le variazioni cui va soggetta la gravità specifica dell'olio per le diverse sue qualità e pel vario grado di purezza, fanno che la precedente definizione del rotolo siculo non sia molto precisa. Il fu Generale Visconti fece paragonare nella Zecca di Napoli un campione officiale del rotolo siciliano in porfido ad un campione officiale del chilogrammo venuto da Parigi servendosi di una bilancia sensibilissima, e trovò che,

il rotolo siculo equivale a chilogrammi. 0,79342;

su questo rapporto egli calcolò che il rotolo siciliano corrisponde ad 80 once cube siciliane di acqua distillata (*) pesata nell'aria a Palermo sotto la pressione barometrica di 28 pol. ed alla temperatura di 17°,82 di Reaumur.

CAPO II.

PARAGONE DELLE MISURE.

Nozioni generali.

§. 269. Il paragone del sistema metrico di un paese con quello di un altro paese dipende unicamente dal rapporto delle rispettive unità di misura lineare, perocchè essendo tutte le altre misure, di superficie, di capacità e di peso, legate a quelle unità con relazioni conosciute, dato il rapporto delle misure lineari, se ne potranno facilmente desumere i rapporti delle misure subordinate. Ma bisogna bene avvertire che i rapporti delle misure superficiali e cubiche si desumono dai quadrati e dai cubi de' rapporti delle corrispondenti unità lineari. Si sa, per esempio, che 100 metri equivalgono a 378 palmi, e siccome la superficie che ha 100 metri di lunghezza e 100 metri di larghezza in quadro, ossia il *quadrato* che ha 100 metri di lato, equivale a $100\times100=10000$ metri quadrati (§. 222), e similmente il quadrato che ha 378 palmi di lato equivale a $378\times378=142884$ palmi quadrati, così 10000 metri quadrati dovranno equivalere a 142884 palmi quadrati, perchè due quadrati sono eguali quando i loro lati sono eguali. Allo stesso modo il parallelepipedo rettangolo che ha 100 metri di lunghezza, 100 di larghezza e 100 di profondità,

(*) Ottanta once cube equivalgono al volume di un parallelepipedo rettangolo di 5 once di altezza, ed avente per base un quadrato di 4 once di lato, ovvero al cubo di 4 once più la sua quarta parte

ossia il *cubo* che ha 100 metri di lato, corrisponde a metri cubi $100\times100\times100=100^3$ (ivi), ed il cubo che ha 378 palmi di lato corrisponde a 378^3 palmi cubici; a dovendo questi due cubi essere eguali fra loro perchè hanno lati eguali, si conchiuderà che 100^3 metri cubi equivalgono a 378^3 palmi cubi, ossia che 1000000 di metri cubi equivalgono a 54010152 palmi cubi. Essendo poi 100^2 metri quadrati equivalenti a 378^2 palmi quadrati, e 100^3 metri cubi equivalenti a 378^3 palmi cubi, ne segue (§. 243) che

$$1^{met\ quad} : 1^{pal\ quad} : : 378^2 : 100^2$$

$$1^{met\ cub} : 1^{pal\ cub} : : 378^3 : 100^3$$

le quali proporzioni si desumono ancora da quella esistente fra le unità lineari,

$$1^{metro} : 1^{palmo} : : 378 : 100,$$

elevandone i termini a quadrato od a cubo (§. 206), e dimostrano che i *rapporti fra le unità superficiali o cubiche sono i quadrati o i cubi de' rapporti fra le unità lineari*. Le medesime proporzioni, applicandovi la regola del tre, danno le relazioni seguenti

$$1^{met}=\frac{378}{100}palmi,\ 1^{pal}=\frac{100}{378}metri$$

$$1^{met\ quad}=\frac{378^2}{100^2}palmi\ quad,\ 1^{pal\ quad}=\frac{100^2}{378^2}metri\ quad$$

$$1^{met\ cub}=\frac{378^3}{100^3}pal\ cub,\quad 1^{pal\ cub}=\frac{100^3}{378^3}metri\ cubi$$

§. 270. Un' altra importante osservazione deve farsi relativamante alle misure quadrate e cubiche. Abbiamo veduto (§. 221), che, moltiplicando fra loro due lunghezze espresse in numeri per mezzo della stessa unità lineare, il prodotto che si ottiene rappresenta una superficie espressa anche in numeri mediante l' unità quadrata corrispondente all' unità lineare assunta; così 33 metri moltiplicati per 25 metri danno 825 metri quadrati. Ma se nelle misure da moltiplicarsi si considerano diversi ordini di unità una decupla dell' altra, come il *metro*, il *decametro* l' *ettometro* etc., e si vogliono nel prodotto distinguere le rispettive unità quadrate, allora bisognerà ricordarsi che il quadrato delle decine non può contenere cifre significative di un ordine inferiore alle centinaia (§. 151), il quadrato delle centinaia non può contenere cifre significative di un ordine inferiore alle decine di migliaia etc.; e quindi in un prodotto di metri per metri le prime due cifre a destra esprimeranno *metri quadrati*, le seconde due cifre *decimetri*, ovvero *are*, la terza coppia esprimerà *ettometri quadrati*, ossia *ettare*, e così di seguito. Laonde il precedente prodotto, 825, contiene 8 are e 25 metri quadrati. Allo stesso modo si distingueranno i varii ordini di unità cubiche nel prodotto di tre lunghezze espresse in numeri, avvertendo soltanto di dividerlo in ternarii in vece di coppie (§. 159); per esempio il prodotto 4 538 124 sarà composto di 4 ettometri cubi, 538 decametri cobi, e 124 metri cobi.

Ciò che si è detto del prodotto di due o tre lunghezze espresse in numeri vale ancora per un numero qualunque indicante misure quadrate o cubiche, malgrado che non risulti dalla moltiplicazione di due o tre numeri; perocchè in generale, trattandosi di unità quadrate, ogni centinaio corrisponde al quadrato di una decina, ogni decina di migliaia al quadrato di un centinaio etc.; e per le unità cubiche ciascun migliaio corrisponde al cubo di una decina, ciascun milione al cubo di un centinaio, e così in progresso. E la stessa regola si può estendere alle frazioni decimali dell' unità principale dividendo in coppie o in ternarii le cifre decimali di un numero indicante misure quadrate o cubiche a partire dalla virgola, analogamente a quanto si è detto nei §§. 155, e 160: la prima coppia o il primo ternario esprimerà centesimi quadrati o cubi, e così andando avanti; è chiaro poi che, occorrendo, bisognerà render completa l' ultima coppia o l' ultimo ternario a destra con l' aggiunta di uno o due zeri. Dopo tutto ciò, in un numero qualunque indicante misure quadrate o cubiche si potranno facilmente distinguere i diversi

ordini di unità quadrate o cubiche, sì intere che decimali; per esempio il numero di metri quadrati 4135,121 sarà composto di 41 decametri quadrati, 35 metri q., 12 decimetri q., e 10 centimetri q., e se lo stesso numero indicasse metri cubi, conterrebbe 4 decametri cubi, 135 metri cubi, e 121 decimetri cubi. E qui deve avvertirsi la grande differenza che passa tra le frazioni decimali di una unità quadrata o cuba ed i quadrati o i cubi delle frazioni corrispondenti dell' unità lineare; così un decimo di metro quadrato è molto diverso da un decimetro quadrato, ed equivale propriamente a 10 decimetri q.; ed un decimo di metro cubo vale 100 decimetri cubi, etc., come si vede facilmente.

§. 271. L' osservazione precedente, relativa alle frazioni dell'unità principale non vale per i numeri complessi ne' quali la divisione di quella unità non è decimale. Così le frazioni decimali di tesa quadrata o cuba non rappresenteranno piedi o pollici quadrati o cubici; ed è chiaro che le relazioni fra le unità secondarie quadrate o cubiche con l' unità principale e fra loro, saranno diverse secondo le diverse misure. La tesa lineare contenendo 6 piedi, la tesa quadrata conterrà $6\times6=36$ piedi quadrati (§. 222), e la tesa cuba sarà composta di $6\times6\times6=216$ piedi cubici, similmente il piede quadrato conterrà $12\times12=144$ pollici quadrati, ed il piede cubo $12\times12\times12=1728$ pollici cubi etc. La canna composta di pa'mi ed once, nel modo usato in Napoli prima della Legge del 6 Aprile, offre altre relazioni; la canna quadrata si compone di $8\times8=64$ palmi q., o la cubica di $8\times8\times8=512$ palmi cubici; il palmo quadrato si compone, come il piede, di 144 once quadrate, ed il palmo cubo di 1728 once cubiche; e finalmente l' oncia quadrata contiene $5\times5=25$ minuti quadrati, e l'oncia cuba $5\times5\times5=125$ minuti cubi.

Da ciò si comprende quanto debba riuscire più difficile il calcolo delle misure quadrate o cubiche allorchè si tratta di numeri complessi, e poichè occorre non di rado di farne uso, noi esporremo qui appresso le avvertenze principali che ad esso si riferiscono.

Avvertenze da usarsi nel calcolo delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche.

§. 272. Quando l' unità lineare si divide in parti decimali, il calcolo delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche si esegue come quello de' numeri astratti, e solo deve farsi attenzione al significato de' prodotti o de' quozienti ottenuti dalle moltiplicazioni o divisioni di questo genere. Per esempio, dopo la Legge del 6 Aprile, la *canna* napolitana essendo divisa in 10 palmi, ed il palmo in 10 once, per moltiplicare $3^{can}\,4^{pal}\,9^{on},3$ per $9^{can}\,7^{pal}\,2^{on},4$, si moltiplicheranno fra loro i numeri 3,493 e 9,724, ed il prodotto 33,965932 esprimerà canne quadrate e frazioni decimali di canna, o pure, volendo in esso ravvisare i palmi quadrati e le once quadrate, si dirà che contiene 33 *can. q.*, 96 *pal. q.*, e 59,32 *onc. q.* (§. 270). Si avverte ancora che quel numero di canne quadrate si potrà subito ridurre in palmi quadrati trasportando la virgola due luoghi a destra, ed in once quadrate trasportandola quattro luoghi, dimodochè canne quadrate 33,965932 equivalgono a palmi quadrati 3396,5932, ovvero ad once quadrate 339659,32; le quali operazioni oltre di essere giustificate abbastanza da ciò che si è detto nel §. citato, sono immediatamente dimostrate riflettendo che 3396,5932 è il prodotto di palmi 34,93 per palmi 97,24, e 339659,32 è il prodotto di once 349,3 per once 972,4. Similmente per moltiplicare $3^{c}.4^{p}.9^{o},3$ per $9^{c}.7^{p}.2^{o},4$ e per $2^{c}1^{p}.7^{o}$ si moltiplicheranno fra loro i numeri 3,493;9,724; 2,17, ed il prodotto 73,70607244 esprimerà canne cube; per ridurle in palmi cubi si passerà la virgola dopo tre luoghi a destra, e per ridurlo in once cube, si passerà dopo sei luoghi, per cui quel prodotto corrisponderà pure a 73706,07244 palmi cubi, ovvero a 73706072,44 once cube; e volendo distinguerlo in canne cube, palmi cubi ed once cube, si dirà che contiene 73 *can. c*, 706 *pal. c.*, e 72,44 *on. c.*

La divisione delle quantità espresse in unità quadrate o cubiche, quando l' unità lineare si divide in parti decimali, si eseguirà pure come quella de'numeri astratti, e bisognerà solamente far attenzione alla natura del quoziente; il quale sarà un numero astratto, se si tratterà di dividere unità quadrate per unità quadrate, o unità cube per unità cube; esprimerà unità lineari, se dovranno dividersi unità cube per unità quadrate, o pure unità quadrate per unità lineari; ed indicherà unità quadrate se dovranno dividersi unità cube per unità' lineari. Tutto ciò si comprende facilmente riflettendo, 1.° che il prodotto di due numeri esprimenti unità lineari rappresenta unità quadrate, ed il prodotto di unità quadrate per unità lineari esprime

unità cubiche, 2 ° che ogni prodotto diviso per uno de' suoi fattori deve dare l'altro fattore; ma lo studio della *Geometria* rischiara maggiormente queste idee. La divisione di unità lineari per unità quadrate o cubiche, come pure di unità quadrate per unità cubiche non avrebbe alcun significato.

§. 273. Quando l'unità lineare è complessa, le operazioni da eseguirsi su i numeri esprimenti unità quadrate, o cubiche costituiscono un calcolo di numeri complessi alquanto diverso da quello già considerato altrove, e la differenza nasce da che i rapporti esistenti fra le unità principali quadrate o cubiche e le unità secondarie sono i quadrati o i cubi dei rapporti che si verificano fra le corrispondenti unità lineari.
Cominciamo con dare qualche esempio di addizione e di sottrazione.

Addizione

$54^{t\cdot q}$	$.22^{p\cdot q}$	$.100^{pp.q}$
31	.12	.110
4	.35	. 48
90	.34	.114

Sottrazione.

$95^{c\cdot c}$.	$60^{p\cdot c}$.	$96^{o\cdot c}$.	$20^{m\cdot c}$
21	.500	. 624	.12
73	. 71	.1200	. 8

L'addizione è fra tese, piedi e pollici quadrati. e la sottrazione fra canne, palmi, once e minuti cubici, secondo l'antica divisione usata in Napoli. Le operazioni si sono eseguite come quelle de' numeri complessi (§§. 165, 166); ma il piede quadrato si è fatto di $12^2=144$ pollici, la tesa di $6^2=36$ piedi, e rispetto alle misure cubiche, l'oncia si è fatta di $5^3=125$ minuti, il palmo di $12^3=1728$ once, e la canna di $8^3=512$ palmi (§ 271).

§. 274. La moltiplicazione di misure lineari complesse per misure lineari complesse della stessa specie si può eseguire in quattro diversi modi come nei §. 172 e 173, cioè 1.° riducendo le frazioni complesse in frazioni ordinarie dell'unità principale, 2 ° riducendo le frazioni complesse in frazioni decimali dell'unità principale, 3.° col metodo di prendere in parti, 4.° riducendo i fattori in unità dell'ultima specie. Applichiamo le prime tre diverse maniere alla moltiplicazione di $5^c\ 4^p\ 3^o$ per $4^c\ 2^p\ 2^o$, riserbandoci di parlare in fine della quarta; ecco l'andamento del calcolo al quale faremo seguire gli opportuni schiarimenti.

1.ª

$5^c\ \frac{17}{32}$
$4^c\ \frac{13}{48}$
$20\ \frac{221}{1536}$
$2\ \frac{4}{32}$
$1\ \frac{17}{48}$
$23^{c\cdot q}\frac{112}{512}$

$319^{c\cdot q}$
64
1276
1914
$20416^{p\cdot q}$ | 512
5056 | $39^{p\cdot q}.126^{o\cdot q}$
448
144
1792
1792
448
$64512^{o\cdot q}$
1331
3072
0000

2.ª

5,53125
4,270833...
4,270833
521355
21354165
2135417
128125
4271
854
214
$23^{c\cdot q}$ | 623046
64
2492184
3738276
$39^{p\cdot q}$ | 874944
144
3499776
3499776
874944
$125^{o\cdot q}$ | 991936

3.ª

	5^{c} .	4^{p} .	3^{on}		
	4	2	2		
	20				
per 4 *pal.*	2				
per 1 *pal.*					4^{cp}
per 3 *on.*		1^{cp}			
per 2 *pal.*	1 .	3^{cp} .	0^{co} .	$3^{cm}\frac{3}{4}$	
per 1 *pal.*					$5^{cp}, 6^{co}, 1^{cm}\frac{7}{8}$
per 2 *on.*		0 .	11 .	$\frac{9}{16}$	
Somma	$23^{c.q}$.	$4^{c.p}$.	11^{co} .	$4^{cm}\frac{1}{16}$	
		8	96	480	
		$32^{p \cdot q}$	66	1920	
			99	30	
			$1056^{o \cdot q}$ | 144	$1950^{m \cdot q}$ | 25	
		7	48 — $7^{p \cdot q}$	200 — 78	
			78	000	
	$23^{c \cdot q}$.	$39^{p \cdot q}$.	$126^{o \cdot q}$		

1.ª Dopo aver ridotte le frazioni complesse del moltiplicando e del moltiplicatore in frazioni ordinarie, si è eseguita la moltiplicazione di un intero e frazione per un intero e frazione al solito; il prodotto 23 $\frac{319}{512}$ dovendo dinotare canne quadrate, si è ridotta la frazione $\frac{319}{512}$ di canna quadrata in palmi q. ed onca q., e si sono ottenuti $39^{p \cdot q}$ $126^{o.q}$ Per fare questa riduzione si è considerata la frazione $\frac{319}{512}$ come la 512*esima* parte di 319 canne q., e si sono cambiate le canne q. in palmi q. moltiplicandole per 64; indi si è diviso il prodotto per 512, e si sono ottenuti $39^{p \cdot q}$ per quoziente e $448^{p \cdot q}$ per resto; si è ridotto questo resto in onca q. moltiplicandolo per 144, e continuando la divisione per 512 si è avuta l'ultima parte del quoziente, $126^{o \cdot q}$. La conversione di una frazione ordinaria in frazione complessa di unità quadrate non differisce dunque per nulla da quella di cui si è parlato nel §. 171, e solo bisogna ricordarsi che i rapporti fra le unità quadrate delle diverse classi sono i quadrati de' rapporti fra le corrispondenti unità lineari.

2.ª Si sono ridotte le frazioni complesse in frazioni decimali, e si è calcolato quante cifre bisognava ritenerne affinchè il prodotto contenesse un errore piccolissimo, e propriamente non maggiore di un'oncia quadrata. A tal fine si è considerato che una canna quadrata è composta di $8^2=64$ palmi quadrati, e di $8^2 \times 12^2 = 64 \times 144 = 9216$ once q., per cui volendo limitare l'approssimazione ad un'oncia quadrata, il prodotto doveva essere esatto fra un diecimilesimo. Quindi, per la regola data nel §. 126 dovevano ritenersi cinque cifre sì nel moltiplicando che nel moltiplicatore, ma se n'è ritenuta una di più per eseguire la moltiplicazione col metodo abbreviato esposto nel §. 133. La frazione decimale di canna quadrata 0,623046 annessa al prodotto si è ridotta in palmi quadrati ed once q. nel modo indicato nel §. 171 e supponendo, come nell'operazione precedente, la canna quadrata composta di 64 palmi q., ed il palmo q. di 144 once q.

3.ª Tutta questa terza operazione sino alla *Somma* è stata eseguita perfettamente col metodo di prendere in parti, considerando i fattori della moltiplicazione ed i prodotti parziali come misure lineari, cioè supponendo sempre la canna divisa in 8 palmi, il palmo in 12 once e l'oncia in 5 minuti. Non è difficile giustificare questa maniera di operare, e far conoscere nello stesso tempo il significato de' prodotti parziali e del prodotto totale così ottenuti.

Quando si prendono le parti aliquote di una misura quadrata, considerandola divisa e suddivisa nelle sue specie secondarie come si divide la misura lineare

dello stesso nome, quelle parti così ottenute rappresentano tanti rettangoli aventi per lunghezza comune la principale unità lineare, e per altezze i multipli delle sue unità secondarie, o suddivisioni. Questo principio per la sua semplicità non ha bisogno di dimostrazione, e solo vuol esser chiarito con qualche esempio. Se una canna quadrata si suppone divisa in 8 parti eguali come la canna lineare, ognuna di quelle parti sarà un rettangolo che ha per lunghezza una canna e per altezza un palmo, e si chiama *canna-palmo*; quindi per prendere, a cagion d'esempio, la quarta parte di 2 canne quadrate, supponendole divise come le canne lineari, si prenderà la quarta parte di 16, che sarà 4, ed indicherà canne-palmi. Allo stesso modo, considerando una canna-palmo divisa in 12 parti eguali come il palmo lineare, ognuna di queste parti dodicesime sarà un rettangolo avente per lunghezza una canna e per altezza un'oncia, e sarà chiamata *canna-oncia*; e dividendo la canna-oncia in 5 parti eguali come l'oncia lineare, si otterrà in fine un rettangolo la cui lunghezza sarà sempre una canna e l'altezza un minuto, e sarà detto *canna-minuto*. E poichè la canna-palmo si divide in canne-once ed in canne-minuti come il palmo lineare in once e minuti lineari, è chiaro ancora che, se si prenderanno le parti aliquote di un dato numero di canne-palmi, o di canne-once come si prendono delle misure lineari, quelle parti esprimeranno canne-once e canne-minuti; così la quinta parte di 7 canne-palmi sarà $1^{can.pal}\,4^{c.on}\,4^{c.min}$, al pari della quinta parte di 7 palmi che è $1^{pal}\,4^{on}\,4^{min}$. Tutto ciò non ha alcuna difficoltà per chi conosce i principii di Geometria, e basta a dimostrare che avendo, nella 3.ª operazione di sopra trascritta, moltiplicata la frazione complessa $4^{p}.3^{on}$ del moltiplicando per la prima specie 4^{c} del moltiplicatore, col solito metodo di prendere in parti, usato come per le misure lineari, le specie secondarie contenute nei prodotti parziali così ottenuti sono risultate canne-palmi, canne-once, e canne minuti.

Passando al prodotto del moltiplicando $5^{c}.4^{p}.3^{on}$ per la frazione complessa del moltiplicatore $2^{p}.2^{on}$, deve inoltre osservarsi che la *moltiplicazione di una canna per canne, per palmi, per once, o per minuti dà canne quadrate, canne-palmi, canne-once, o canne-minuti*, come è chiaro per la Geometria, e quindi il prodotto di 1^{c} per $5^{c}.4^{p}.3^{on}$ esprimerà canne quadrate, canne-palmi, e canne-once: ma nella operazione che stiamo esaminando, il prodotto di $2^{p}.2^{on}$ per $5^{c}.4^{p}.3^{on}$ si è eseguito prendendo le parti aliquote del prodotto di 1^{c} per $5^{c}.4^{p}.3^{on}$, dunque così facendo si sono prese le parti aliquote di un certo numero di canne quadrate, canne-palmi e canne-once, e propriamente di $5^{c.q}4^{c.p}3^{c.o}$; e poichè quelle parti si sono prese supponendo al solito la canna quadrata divisa e suddivisa come la canna lineare, per il principio qui sopra stabilito potremo conchiudere che anche la moltiplicazione dalla frazione complessa del moltiplicatore pel moltiplicando ha dovuto dare canne quadrate, o *canne-canne*, canne-palmi, canne-once, e canne-minuti; e per conseguenza la *Somma* di tutti i prodotti parziali è risultata composta delle medesime specie di unità complesse.

Dopo aver fatto conoscere il significato delle specie secondarie contenute nel prodotto totale, sarà facile accennare come siansi ridotte in unità quadrate. La canna-palmo, la canna-oncia e la canna-minuto sono rettangoli che hanno tutti per lunghezza una canna, e per larghezza un palmo, un'oncia, ed un minuto rispettivamente; quindi per esprimerli in misure quadrate bisognerà che la lunghezza di ciascuno sia ridotta in unità della stessa specie della larghezza (§. 222). La canna-palmo dovrà dunque considerarsi un rettangolo di 8 palmi di lunghezza ed 1 palmo di larghezza, equivalente perciò ad 8 palmi quadrati: la canna-oncia avrà $8\times12=96$ once di lunghezza ed un'oncia di larghezza, e corrisponderà a 96 once quadrate; la canna-minuto avrà $8\times12\times5=480$ minuti di lunghezza ed 1 minuto di larghezza, ed equivarrà a 480 minuti quadrati. Laonde per ridurre le specie secondarie del prodotto totale in misure quadrate, si sono moltiplicate rispettivamente per 8 per 96 e per 480, cioè per gli stessi numeri che servono a ridurre la canna lineare in palmi, once e minuti lineari.

Riassumendo il fin qui detto intorno alla 3.ª operazione ne risulta che, *la moltiplicazione di due numeri complessi esprimenti misure lineari della stessa specie si esegua col metodo di prendere in parti, considerando nella formazione de' prodotti parziali l'unità principale divisa nelle sue specie secondarie come l'unità*

lineare, o sia non allontanandosi per nulla dalle regole date nei §§. 175 a 174 per la moltiplicazione de' numeri complessi non omogenei; ottenuto così il prodotto totale, ciascuna delle specie secondarie in esso contenuta si riduca in unità quadrata come un numero di unità lineari della prima specie si ridurrebbe in unità della specie secondaria corrispondente al luogo ed al nome che ha nel prodotto la quantità che vuol tradursi in misura quadrate.

§. 275. La riduzione di una frazione ordinaria di canna quadrata in frazione complessa, cioè in palmi quadrati ed once quadrate, offre sempre delle agevolazioni di calcolo, quando quella frazione ordinaria risulta da una moltiplicazione, come nella 1.ª delle tre operazioni ora discusse: poichè il denominatore della frazione ordinaria contiene dei fattori comuni coi numeri per i quali deve moltiplicarsi il numeratore onde eseguire la riduzione. Così per ridurre la frazione $\frac{319}{512}$ di canna quadrata, in palmi quadrati, dovendosi moltiplicare il numeratore 319 per 64, e dividere il prodotto ottenuto per 512, si rifletterà che $512=8\times64$, e però,

$$\frac{319\times64}{512}=\frac{319\times64}{8\times64}=\frac{319}{8},$$

ed eseguendo la divisione semplicissima di 319 per 8, si otterrà subito il numero 39 di palmi quadrati con la frazione $\frac{7}{8}$ di palmo quadrato. Per cambiare questa frazione in once quadrate, si sa che un palmo quadrato contiene 144 once quadrate; e però si toglierà dal numero 144 la sua ottava parte, e si otterranno 126 once quadrate.

Simili abbreviazioni possono applicarsi alla riduzione in unità quadrate delle specie secondarie contenute nel prodotto totale ottenuto con la 3.ª operazione. Per ridurre $11^{c.o}$ in palmi quadrati bisognava moltiplicare 11 per 96 e dividere il prodotto per 144 cioè moltiplicare 11 per $\frac{96}{144}$; ma riflettendo che $96=8\times12$, e $144=12\times12$, l' operazione riesce più semplice se si moltiplica 11 per $\frac{8}{12}$ ossia per $\frac{2}{3}$ il che dà 7 palmi quadrati ed $\frac{1}{3}$ di palmo quadrato, o siano 48 once quadrate. Similmente, per ridurre $4^{c.m}\,\frac{1}{16}$ in once quadrate si doveva moltiplicare questo numero per 480 e dividere il prodotto per 25, cioè moltiplicare $4\frac{1}{16}$ per $\frac{480}{25}=\frac{48\times2\times5}{5\times5}=\frac{96}{5}$, onde l' operazione riesce più breve se si moltiplica $4\frac{1}{16}$ per 96, e si divide il prodotto per 5.

Le stesse abbreviazioni si presentano anche nella moltiplicazione dei numeri complessi eterogenei allorchè si esegue con ridurre all' ultima specie, ed indi ad una sola frazione ordinaria, ciascuno dei due fattori, come si è accennato nel §. 172.

§. 276. La moltiplicazione di tre numeri complessi esprimenti misure lineari della stessa specie si eseguirà moltiplicando prima fra loro due fattori come qui sopra, e poscia moltiplicando il prodotto ottenuto per il terzo fattore. Questa seconda moltiplicazione di misure superficiali per misure lineari dovrà dare nel prodotto misure cubiche, e potrà eseguirsi con una regola analoga alla precedente. Bisogna soltanto avvertire che il prodotto in misure superficiali ottenuto dalla moltiplicazione de' primi due fattori lineari deve conservarsi quale risulta dalla somma de' prodotti parziali, senza convertirne le specie secondarie in unità quadrate. Sieno da moltiplicarsi fra loro le tre lunghezze complesse $5^{can}.\ 4^{pal}.\ 3^{on}$, $4^{c}.\ 2^{p}.\ 2^{on}$, $12^{c}.\ 4^{p}.\ 6^{on}$; si è già fatto il prodotto delle prime due, e si tratta ora di moltiplicarlo per la terza. Eseguiremo, come sopra, l' operazione nelle prime tre diverse maniere aggiungendo per ciascuna gli opportuni schiarimenti.

1.ª

$23^{c \cdot q}\frac{119}{512}$
$12^{c}\ \frac{9}{16}$
$46\ \frac{2871}{8192}$
23
$7\ \frac{244}{512}$
$12\ \frac{15}{16}$
$296^{c.cub}\frac{5263}{8192}$

$$6263 \times \frac{512^{pc.}}{8192} = 6263 \times \frac{512^{p.c}}{512 \times 16}$$

6263	16
146	$391^{p \cdot c}.756^{o \cdot c}$
23	
7	

$$7 \times \frac{1728^{o \cdot c}}{16} = 7 \times 108^{o \cdot c}$$

2.ª

23,62304687 . . .
12,5625

23,62304687
526521

23 62304687
4 72460937
1 18115231
14173828
472461
118115

$296^{c \cdot cub}$	7645262
	215

38226310
764526
152905

$391^{p \cdot cub}$	43741
	8271

43741
30619
875
350

$755^{c \cdot cub}$	85

Segue la terza operazione eseguita col metodo di prendere in parti.

3.ª

23^{cc} . 4^{cp} . 11^{co} . $4^{cm}\frac{1}{16}$
12^{c} . 4^{p} . 6°

46^{ccc}
23
per 4 *pal*....6
per 1 *pal*.. 1^{ccc} . 4^{ccp}
per 6 *on*.....0 . 6^{ccp}
per 3 *on*.............3
per 2 *on*............2
per 2 *min*..........0...... 4^{cco} . 4^{ccm}
per 2 *min*................. 4 . 4
per $\frac{1}{16}$ *min*.................................... 0 $\frac{7}{8}$
per 4 *pal*...11 . 6 . 5 . 4 $\frac{17}{32}$
per 6 *onc*...1 . 3 . 9 . 3 $\frac{177}{256}$

Somma...296^{ccc}, $6^{ccp}\times 8^{o}$ $1^{cco}\times\frac{8^{2}.12^{2}}{12^{3}}$ $1^{ccm}\frac{249}{256}\times\frac{8^{2}.12^{2}.5^{2}}{5^{3}}$

64 ; $\frac{64}{64}$ | 12 ; 4 $5^{p.c}$; 9216

$384^{p.cub}$; 9216
+5 ; 8964
+2 ; 18180
$391^{p.cub}$; $3636^{o.cub}$

$+\frac{1}{3}p.cub. = 576$

4212 | 1728
$756^{o.cub}$ $2^{p.cub}$

1.° Nella prima operazione vi è poco da osservare. Solo faremo riflettere che, se in vece della frazione $\frac{319}{512}$ di canna quadrata fosse data la frazione complessa $39^{p.q.}126^{o.q}$, per riduria in frazione ordinaria bisognerebbe ricordarsi che un palmo q. vale 144 once q., ed una canna q. vale 64 palmi q.; e però $126^{o.q}$ si cambierebbero in $\frac{126}{144}=\frac{7}{8}$ di palmo q., e 39 $\frac{7}{8}$ pal. q. ($=\frac{319}{8}$ pal. q.) in $\frac{319}{8\cdot 64}=\frac{319}{512}$ canne q. Per ridurre la frazione ordinaria $\frac{6463}{8192}$ di canna cubica in frazione complessa, si è usata la regola del §. 171, considerando la canna cuba composta di $8\times 8\times 8 = 512$ pal. cub. ed il palmo cubo di $12\times 12\times 12 = 1728$ once cub., e si è fatto uso delle abbreviazioni delle quali è parola nel §. 275.

2.° L'approssimazione del moltiplicando 23,623... si è spinta sino all'ottava cifra affinchè il prodotto contenesse un errore minore di un'oncia cuba. In fatti una canna cuba contiene 8^{3} palmi cubi, ovvero $8^{3}\times 12^{3} = 884736$ once cube, e quindi il prodotto, esprimente canne cube, dovrà essere approssimato sino ad un milionesimo, perchè differisca dal vero meno di un' oncia cuba, e per la regola data nel §. 126 ciascuno de' due fattori dovrebbe estendersi sino alla ottava cifra; ma il moltiplicatore essendo esatto, basterebbe in questo caso estendere il solo moltiplicando sino alla settima cifra, attesa la piccolezza della prima cifra del moltiplicatore, e si è esteso fino all'ottava per poter eseguire la moltiplicazione col metodo abbreviato, esposto nel §. 133, di cui si è fatto uso anche nella riduzione in misure cubiche della frazione decimale annessa al prodotto, per economia ed ordine di calcolo.

3.° La moltiplicazione si è eseguita col metodo di prendere in parti senza aver nessun riguardo alle misure quadrate e cubiche, ma considerando i fattori ed i prodotti parziali come misure lineari, in quanto alla loro divisione nelle specie secondarie. In questo modo, tanto il prodotto della frazione complessa del moltiplicando per la prima specie del moltiplicatore, quanto il prodotto della frazione com-

plessa del moltiplicatore per il moltiplicando sono risultati composti di canne cube, *canne-canne-palmi*, *canne-canne-once* e *canne-canne-minuti*; intendendosi per canna-canna-palmo un parallelepipedo avente per base una canna quadrata e per altezza un palmo, per canna-canna-oncia un parallelepipedo della stessa base e di un'oncia di altezza, e per canna-canna minuto un parallelepipedo sempre della medesima base e di un minuto di altezza. Sarà facile persuadersi di questo fatto applicando alle misure cubiche il ragionamento esposto per le misure quadrate, e tenendo presente 1.° *che le parti aliquote di una misura cuba, quando si considera divisa nelle sue specie secondarie come la corrispondente misura lineare, sono tanti parallelepipedi rettangoli aventi per base la principale unità quadrata e per altezze i multipli delle suddivisioni dell' unità lineare*; 2.° *che i prodotti di una canna lineare per canna-palmi, canne-once etc. sono parallelepipedi rettangoli simili a quelli ora indicati, cioè canne-canne-palmi, canne-canne-once etc.*

Per ridurre le misure cubiche le canne-canne-palmi, canne-canne-once e canne-canne-minuti era necessario che le tre dimensioni di ciascuno di questi parallelepipedi fossero espresse per una medesima unità lineare, e però le due dimensioni della base si sono ridotte in unità della stessa specie dell' altezza. Così la canna-canna-palmo si è ridotta in palmi cubici moltiplicandola per $64=8\times8$; cioè riducendo in palmi lineari i due lati della canna quadrata che serve di base a quel parallelepipedo; e la canna-canna-oncia si è cambiata in once cubiche moltiplicandola per 8.12×8.12, ossia riducendo in once i due lati della canna quadrata che le serviva di base; dopo di che si è ridotta in palmi cubici dividendo il prodotto per $12^3=1728$, con far uso delle abbreviazioni indicate nel §. 275. E finalmente la canna-canna-minuto si è ridotta in minuti cubici moltiplicandola per $8.12.5\times8.12.5$ cioè riducendo in minuti i due lati della sua base, e per passare dai minuti cubici alle once cubiche, si è diviso il prodotto per $5^3=125$, incaricandosi anche del §. 275.

Dopo tutto ciò si può conchiudere che *la moltiplicazione di un numero esprimente misure superficiali complesse per un altro indicante misure lineari della stessa specie si esegue col metodo di prendere in parti, considerando nella formazione de' prodotti parziali l' unità principale divisa nelle sue specie secondarie come l' unità lineare, ossia applicando esattamente a questo caso le regole date nei §§. 173, 174 per la moltiplicazione de' numeri complessi non omogenei. Ottenuto così il prodotto totale, ciascuna delle specie secondarie in esso contenute si riduce in unità cubiche come un numero di unità quadrate della prima specie si ridurrebbe in unità quadrate della specie secondaria corrispondente al luogo ed al nome che ha nel prodotto la quantità che vuol tradursi in misure cubiche*; per esempio si sono ridotte 6 canne-canne-palmi in palmi cubici come si ridurrebbero 6 canne quadrate in palmi quadrati, ed 1 canna-canna-oncia in once cube, come una canna quadrata in once quadrate.

§. 277. Se il moltiplicando esprimente misure superficiali, fosse dato in unità quadrate come $23^{c\cdot q}\cdot39^{p\cdot q}.126^{o\cdot q}$, non potrebbe ritenersi sotto questa forma per eseguire la moltiplicazione col metodo di prendere in parti, ma bisognerebbe convertire la frazione complessa $39^{p\cdot q}.126^{o\cdot q}$ in canne-palmi, canne-once, e canne-minuti, il che si eseguirebbe dividendo i palmi quadrati per 8, le once q. per 96 ed i minuti q. per 480 nel seguente modo:

$39^{p.q}$	8
7	$4^{c\cdot p}$
144	
$1008^{o\cdot q}$	
126	
1134	
174	96
78	$11^{c\cdot o}$
25	
390	
156	
1950	480
30	$4^{c\cdot m}\frac{1}{16}$

dove il resto di ciascuna divisione si è ridotto in once quadrate, o minuti quadrati ed aggiunto alla quantità della stessa specie contenuta nella proposta frazione complessa, prima d'intraprendere la divisione seguente.

§. 278. Nell'eseguire le moltiplicazioni dei numeri complessi omogenei è preferibile spesso ridurre i fattori in unità dell'ultima specie, facendo uso però delle abbreviazioni accennate nel §. 275. Riprendiamo gli stessi esempii trattati co' metodi precedenti, ed otterremo il prodotto di $5^{c}.4^{p}.3^{on}$ per $4^{c}.2^{p}.2^{on}$, moltiplicando fra loro le due frazioni $\frac{531}{8.12}$, $\frac{410}{8.12}$ (§. 168), ossia eseguendo la divisione di $531 \times 410 = 217710$ per $8^{2}.12^{2} = 9216$. Il quoziente sarà 23 *canne quadrate* con la frazione $\frac{5742}{9216}$ di canna quadrata; e siccome per ridurre questa frazione in palmi quadrati si dovrebbe moltiplicare per 64, così si dividerà in vece il suo denominatore per quel numero, e l'operazione sarà subito ridotta a dividere 5742 per 144, sapendosi già che $9216 = 64 \times 144$. Si otterranno così $39 p.q$ e $\frac{126}{144}$ di *pal. q.*, la quale frazione di *pal. q.* si ridurrà in once quadrate moltiplicandola per 144, o sia sopprimendo il suo denominatore.

Il prodotto $5^{c}.4^{p}.3^{on}$ per $4c.2^{p}.2^{on}$ e per $12^{c}.4^{p}.6^{on}$ si ottiene moltiplicando fra loro le tre frazioni $\frac{531}{8.12}$, $\frac{410}{8.12}$, $\frac{1206}{8.12}$, o sia dividendo il prodotto $531 \times 410 \times 1206 = 262558260$ per $8^{3}.12^{3} = 884736$. Il quoziente sarà 296 *canne cubiche* e $\frac{676404}{884736}$ di canna cubica; e per ridurre questa frazione in palmi cubici, in vece di moltiplicarne il numeratore per $8^{3} = 512$, si dividerà il denominatore, il quale si cambierà in $12^{3} = 1728$. La divisione di 676404 per 1728 darà 391 *pal. cub.* con la frazione $\frac{756}{1728}$ di *pal. cub.*; per ridurre la quale in once cubiche basterà sopprimerne il denominatore.

Se, volendo far uso della riduzione all'ultima specie, in vece di dover moltiplicare tre fattori lineari, fosse da moltiplicarsi un fattore superficiale, come $23^{c.q}.39^{p.q}.126^{o.q}$ per un fattore lineare, bisognerebbe cambiare in numero incomplesso quel fattore superficiale, sempre con la riduzione all'infima specie, ed a tal fine si applicherebbe la regola del §. 168, osservando solo che in questo caso un'unità della prima specie, cioè una canna quadrata, vale 64 palmi quadrati, e un palmo quadrato vale 144 once quadrate.

§. 279. La divisione delle quantità complesse superficiali o cubiche per quantità complesse lineari o superficiali della stessa specie si esegue riducendo le frazioni complesse unite al dividendo e al divisore in frazioni ordinarie o in frazioni decimali, e tenendo presente ciò che si è detto nel §. 272 intorno alla natura dei quoziente; diamone un esempio. Siano da dividersi $296^{can.cub}.391^{p.c}.756^{o.c}$ per $12^{c}.4^{p}.6^{o}$, l'operazione potrà eseguirsi nelle due indicate maniere come qui appresso;

Prima.

296 can·cub   391 pal·cub   756 on·cub | 12c . 4p . 6o

$296\frac{6263}{8192}$ $391\frac{7}{16}$ $\frac{756}{1828}=\frac{7}{16}$ | $4\frac{3}{8}$

592   2346 | $12\frac{9}{16}$ $\frac{3}{8}$

2664   3917 | 72

296   $\frac{6263}{16}$ p. c. $= \frac{6263}{16\times512}$ can. c. | 129

2368 | $\frac{201}{16}=\frac{201\times512}{16\times512}=\frac{102912}{8192}$

6263

$\frac{2431095}{8192}:\frac{102912}{8192}$

2431095 | 102912

372855 | 23c.q 39p.q 126o.q

64119 | 1608 . . . . $64119\times\frac{64}{201.8.64}=\frac{64119}{201.8}$

15879 | 39p.q

1407 . . . . $1407\times\frac{144}{201.8}=\frac{1407.18.8}{201.8}$

18

11256

1407

25326 | 201

522 | 126c.q

1206

0000

Seconda.

296 can·cub   391 pal·cub   756 on·cub | 12c . 4p . 6on

| 4,5 | 8 |

7560 | 1728 | 50 | 0,5625

6480 | 0p·c,4375 | 20

12960   391   4375 | 512 | 40

8640   33   03 | 0c·c,7645 | 00

0000   2   317   296   7645 | 12,5625

2695.   45   5145 | 23c·q,62304

132   7   82700   46.

28950   373824

3825,   21922

56

6   39p.q | 8746

441

8746.

3498

350

125o·q | 94

Prima. Dopo aver ridotto il dividendo e il divisore in frazioni ordinarie dello stesso denominatore, si è eseguita la divisione su i numeratori; e siccome il quoziente doveva esprimer canne quadrate, così si è considerato il dividendo come un numero di canne quadrate e il divisore come numero astratto. Il primo resto della divisione esprimente canne quadrate si è ridotto in palmi quadrati moltiplicandolo per 64, e si è continuata la divisione; e così pure de' palmi quadrati, che si sono ridotti in once quadrate moltiplicandoli per 144, incaricandosi però sempre dell' osservazione del §. 275.

Seconda. Si sono ridotte le once cube in frazione decimale di palmo cubo, ed i palmi cubici in frazione decimale di canna cuba; la prima riduzione ha dato un quoziente esatto, e nella seconda si è spinta l' approssimazione sino a quattro cifre decimali per la seguente ragione. Supponendo che il risultamento della proposta divisione di canne cube per canne lineari si volesse esatto sino a differire dal vero meno di un' oncia quadrata, ossia meno di $\frac{1}{9216}$ di canna quadrata, l'approssimazione del quoziente doveva estendersi sino ai diecimilesimi; ma volendo eseguire la divisione col metodo abbreviato esposto nel §. 136, si è stabilita l'approssimazione a 0,00001. Su questo dato si è cercata l' approssimazione da darsi al dividendo, con la regola assegnata nel §. 127 quando il divisore è esatto e il dividendo approssimato, onde si è esteso il dividendo 296,76...sino ai diecimillesimi. La frazione 0,62304 di canna quadrata si è ridotta in palmi quadrati ed once quadrate eseguendo le moltiplicazioni per 64 e per 144 col metodo abbreviato.

§. 280. Ciò che abbiamo detto qui sopra del calcolo delle quantità espresse in unità quadrate e cubiche, servendoci per esempio dell'antica canna napolitana, potrà applicarsi facilmente a qualunque altra misura complessa, e bisognerà soltanto badare al significato ed al valore che hanno le frazioni dell'unità quadrata o cubica quando si suppongono divise come l' unità lineare nelle loro specie secondarie. Così supponendo la tesa quadrata divisa e suddivisa come la tesa lineare, ne risulteranno la *tesa-piede* equivalente a 6 piedi quadrati, la *tesa-pollice* che vale $6\times12=72$ pollici quadrati, e la *tesa-linea* che comprende $6\times12\times12=864$ linee quadrate; e similmente la tesa cuba divisa come la tesa lineare nelle sue specie secondarie darà origine alla *tesa-tesa-piede* equivalente a $6^2=36$ piedi cubi, alla *tesa-tesa-pollice* che vale $6^2\times12^2=72^2=5184$ pollici cubi, ed alle *tesa-tesa-linea* che contiene $6^2\times12^2\times12^2=864^2=746496$ linee cubiche.

Regole generali per determinare i rapporti delle misure applicate al paragone del sistema metrico di Napoli e di Sicilia col sistema metrico francese.

§. 281. 1.° *Se di un rapporto indicante il valore di una unità di misura in parti di un' altra si prende l' espressione reciproca, questa indicherà il valore della seconda unità di misura in parti della prima.* Sapendosi, per esempio, che $1^{metro}=3,78$ *palmi*, se ne potrà subito conchiudere che $1^{palmo}=\frac{1}{3,78}$ *metri*; o altrimenti, sapendosi che $1^{metro}=\frac{378}{100}$ *palmi*, se ne conchiuderà che $1^{palmo}=\frac{100}{378}$ *di metro*. È facile dar ragione di questa regola osservando che la proposta uguaglianza si può sempre cangiare in una proporzione; in fatti, in vece di $1^{metro}=3,78$ *palmi*, si può scrivere $1\times1^{metro}=3,78\times1^{palmo}$, e questa eguaglianza di due prodotti si cambia (§. 192) nella proporzione $1^{metro}:1^{palmo}::3,78:1$, da cui per la regola del tre, si ottiene $1^{palmo}=\frac{1^{m}}{3,78}=\frac{1}{3,78}$*metri*$=0^{met},26455$... Ecco altri esempii.

Allorchè in Francia fu stabilita legalmente la misura del metro, convenne definirla per mezzo di una misura già esistente a tutti nota, come la tesa con le sue suddivisioni, e si disse 1^{metro} vale $3^{piedi}.0^{pol}.11^{lin},296$; da questo rapporto, rovesciandolo, si ottiene la tesa espressa in parti del metro, ma nel caso attuale bisogna prima ridurre la frazione complessa

di tesa $3^{pi}.0^{po}.11^{l},296$ in frazione decimale. Per ciò che si è detto nel §. 170 sarà,

$$3^{pi}.0^{po}.11^{l},296 = 0^{tes},513074 \text{, e quindi } 1^{metro} = 0,513074 \textit{ tese} \text{, ed}$$
$$1^{tesa} = \frac{1}{0,513074}\textit{met.} = \frac{1000000}{513074}\textit{met.} = 1,949037 \textit{ metri}.$$

Si è veduto (§. 268) che 1 *palmo siciliano*$=\frac{40}{41}$ *pal. nap.*; da questo rapporto si desume che $1^{pal\ nap} = \frac{41}{40}$*pal. sic.*, onde

$$1^{pal.sic.} = 0^{p.n},9756098 \text{, ed } 1^{pal.nap} = 1^{p.s},025.$$

Essendo un rotolo napolitano eguale a $0^{chil},890997$, il valore del chilogrammo in parti dei rot. sarà $\frac{1}{0,890997}$, cioè $1^{chil} = 1^{rot},122338$.

§. 282. 2.° *Quando la relazione sussistente fra due misure è espressa da una equivalenza*, *come* 100 metri$=$378 palmi napolitani, 41 pal. sic.$=$40 pal. nap., *e simili*, *se ne può sempre dedurre il valore di una delle unità di misure in parti dell'altra e viceversa, dividendo i due membri dell'uguaglianza pel moltiplicatore dell'unità che si cerca.* Così dalla prima equivalenza si ottengono le due relazioni, $\frac{100}{100}^{metri} = \frac{378}{100}^{palmi}$, ossia $1^{metro} = \frac{378}{100}$*pal.*, ed $1^{palmo} = \frac{100}{378}$*metri*, e dalla seconda

$$1^{pal.sic} = \frac{40}{41}\textit{pal.nap.} \text{, ed } 1^{pal.nap} = \frac{41}{40}\textit{pal.sic.}$$

La ragione di questa pratica non è diversa da quella esposta qui sopra, la quale si era altronde già accennata nel §. 243.

Per un altro esempio, 46 *galloni* (misura inglese di capacità) equivalgono a 209 litri, e quindi $1^{gallone} = \frac{209}{46}$ litri$=4^{litri},5435$, ed $1^{litro} = \frac{46}{209}gal. = 0^{gal.},2201$.

§. 283. 3.° *Dati i valori di due diverse unità di misura in parti di una terza*, *si ottiene il valore di una di quelle due unità in parti dell'altra*, *e viceversa*, *dividendo rispettivamente uno per l'altro i due valori dati*. Un palmo napolitano equivale a $0^{met},26455$ ed un piede francese a $0^{met},32484$; quindi $1^{pal} : 1^{pied} :: 0,26455 : 0,32484$, e per la regola del tre, $1^{pal} = \frac{0,26455}{0,32484}pied$, ed $1^{pied} = \frac{0,32484}{0,26455}pal.$, cioè

$$1^{palmo} = \frac{26455}{32484}pied = 0^{pied},81440 \text{, ed } 1^{pied} = 1^{pal},22789.$$

Similmente, si sa che

$$1^{metro} = 3.78\textit{pal. nap.} \text{, ed } 1^{pal.sic} = \frac{40}{41}\textit{pal.nap.} \text{, dunque}$$
$$1^{metro} = 3.78 : \frac{40}{41}\textit{pal.sic.} = 3,8745 \textit{ pal.sic.} \text{ ed}$$
$$1^{pal.sic} = \frac{40}{41} : 3.78 met = 0^{met},258098.$$

Questa regola serve a trovare il rapporto di due misure qualunque, quando si abbia una *Tavola* nella quale le misure di diversi paesi siano espresse in parti di una medesima unità. Così nella *Tavola di misure* riportata nell' *Appendice* di questi *Elementi* si trova che il *piede* di Parigi eguaglia $0^{met},32484$, e l'*yard* inglese $0^{met},91438$, e però $1^{piede} = \frac{0,32484}{0,91438}$ *yards*, ed $1^{yard} = \frac{0,91438}{0,32484}$ piedi: cioè *per trovare una misura espressa in parti di un' altra*, *si divide sempre il suo valore riportato nella* Tavola *per quello della seconda misura.*

§. 284. 4.° *Se due misure non sono paragonate immediatamente fra loro o ad una terza*, *ma hanno relazioni conosciute con altre misure intermedie*, *allora per trovare il rapporto fra la prima e l'ultima misura bisognerà servirsi della* regola congiunta *esposta nel* §. 244. Ecco alcuni esempii.

Si vuol trovare il valore del palmo siciliano in parti del metro servendosi delle seguenti relazioni

100 *metri* equivalgono............ a 378 *pal. nap.*
40 *pal. nap*....................... a 41 *pal. sic.*
1 *pal. sic*......................... ad x *metri ;*

per ciò che si è detto nel citato §. 244, sarà

$$x = \frac{100 \times 40}{378 \times 41} = 0^{met},258098.$$

A questo stesso risultamento eravamo già pervenuti applicando le regole 2,3 date di sopra.

Si vuol trovare il rapporto fra la tesa francese e la canna siciliana per mezzo delle relazioni seguenti;

157 *tese* equivalgono........... a 306 *metri*
100 *metri*.......................... a 378 *palmi nap.*
40 *pal. nap*....................... a 41 *pal. sic.*
8 *pal. sic*......................... ad 1 *canna sic.*
1 *can. sic*......................... ad x *tese ;*

$$\text{sarà, } x = \frac{157 \times 100 \times 40 \times 8}{306 \times 378 \times 41} = 1^{tes},0594.$$

Non sarà inutile osservare che le regole 2,3 applicate ripetutamente potrebbero bastare a risolvere il problema. Dalle prime due equivalenze si cavano, per la regola 2, la tesa espressa in metri ed il palmo napolitano espresso anche in metri, cioè $1^{tes} = \frac{306}{157} m$, $1^{p.n} = \frac{100}{378} m$, e quindi, per la regola 3, si otterrà la tesa espressa in palmi napolitani, ossia $1^{tes} = \frac{306}{157} : \frac{100}{378}\ p.n. = \frac{306 \cdot 378}{157 \cdot 100}\ p.n.$; dalla terza equivalenza potendo aversi anche il palmo siciliano espresso in palmi napoletani, cioè $1^{p.s} = \frac{40}{41} p.n.$, se ne deduce similmente la tesa espressa in palmi siciliani, vale a dire $1^{tes} = \frac{306 \cdot 378}{157 \cdot 100} : \frac{40}{41} p.s. = \frac{306 \cdot 378 \cdot 41}{157 \cdot 100 \cdot 40} p.s.$; e finalmente la quarta equivalenza offrendo la canna siciliana espressa pure in palmi siciliani, se ne conchiuderà la canna espressa in tese che risulterà eguale ad 8 : $\frac{306 \cdot 378 \cdot 41}{157 \cdot 100 \cdot 40} = \frac{8 \cdot 157 \cdot 100 \cdot 40}{306 \cdot 378 \cdot 41}$, come quì sopra.

I principii ora esposti, avvalorati in ciò che riguarda le misure quadrate e cubiche da quanto si è detto ne' §§. precedenti, bastano a risolvere qualunque quistione concernente i rapporti delle misure.

§ 285. Continuando il paragone delle misure metriche con quelle del Regno, si vogliano conoscere i rapporti dell' *Ara* col nuovo *Moggio* napolitano, e con la *Salma* di Sicilia. L' Ara, il Moggio e la Salma sono tre quadrati che hanno rispettivamente per lati, 10 metri, 100 palmi napolitani, e 64 canne ovvero 512 palmi siciliani: si riducano in palmi napolitani i metri e i palmi siciliani, ed i lati dei tre quadrati saranno 37p,8, 100p, $\frac{20480^p}{41}$; quindi *il lato dell' Ara sta al lato del Moggio* come 37,8 : 100 : : 18,9 50, ed *il lato dell' Ara sta al lato della Salma* come 37,8×41 : 20480 : : 744,9 : 10240. Ma i rapporti fra le misure quadrate sono i quadrati de' rapporti esistenti fra i loro lati (§. 269), dunque

Ara : *Moggio* : : $(18,9)^2 : 50^2$, ed *Ara* : *Salma* : : $(774,9)^2 : 10240^2$, cioè $1^{ara} : 1^{moggio}$: : 357,21 : 2500; e dividendo i termini della seconda ragione per 357, 21, o per 2500 si avrà

$$1^{ara} : 1^{mog} :: \frac{357,21}{357,21} : \frac{2500}{357,21} :: \frac{357,21}{2500} : \frac{2500}{2500} :: 1 : 6,998684 :: 0,142884 : 1$$

similmente

$$1^{ara} : 1^{salma} :: 600470,01 : 104857600 :: 1 : 174,625873 :: 0,00572653 : 1.$$

Le quali proporzioni danno subito (§. 213).

$$1^{moggio}=6^{are},998684, \qquad 1^{ara}=0^{mog},142884,$$
$$1^{salma}=174^{are},625873, \qquad 1^{ara}=0^{sal},00572653.$$

E poichè il moggio e la salma sono ambedue valutati in are, potrà aversi il moggio in parti della salma e viceversa con la regola 3; sarà

$$1^{moggio}=\frac{6998684}{174625873}\ sal, \quad 1^{salm}=\frac{174625873}{6998684}\ mog.$$

Ma questi ultimi rapporti si ottengono più semplicemente dal rapporto dei lati del moggio e della salma, che è quello dei numeri $100:\frac{20480}{41}$, ovvero 4100:20480, ossia 205:1024; e però

$$1^{mog}:1^{sal}::205^2:1024^2::42025:1048576::1:0,0400782::24,951243:1$$

da cui

$$Moggio\ nuovo\ nap=0^{salm},0400782; \quad Salma\ sic=24^{mog},951243.$$

Dunque un nuovo moggio napolitano differisce pochissimo da 7 are francesi, e contentandosi di una certa approssimazione, può dirsi ancora che la salma di Sicilia equivale a 25 moggia nuove nap.

Per un altro esempio, sapendosi che un metro eguaglia $3^{piedi}\cdot 0^{pol}\cdot 11^{lin},296$, e che un palmo napolitano corrisponde a $0^{pie},81140=9^{pol}\cdot 9^{lin},274$, si voglia trovare il metro quadrato o il palmo quadrato espresso in piedi, pollici, e linee quadrate; bisognerà a tal fine innalzare a quadrato il numero complesso indicante quel valore del metro o del palmo, e perciò che si è detto nel §. 274 si avrà

$$1\ metro\ quad=9^{p\cdot q}.68^{pol\cdot q}.95^{l\cdot q},3; \quad 1^{p\cdot q}=95^{pol\cdot q}73^{l\cdot q},1.$$

§. 286. Passiamo al paragone delle misure di capacità. A tal fine troviamo i rapporti fra il cubo del decimetro, il cubo del palmo napolitano, ed il cubo del palmo siciliano. Un metro vale 3,78 palmi nap. ed un decimetro 0,378 pal., ma un palmo siciliano equivale a $\frac{40}{41}$ di pal. nap., dunque

$$decimetro : palmo\ nap :: 0,378 : 1 :: 1,89 : 5, \text{ e}$$
$$decimetro : palmo\ sic :: 0,378 : \tfrac{40}{41} :: 7,749 : 20$$

E poichè le unità cubiche stanno fra loro come i cubi delle rispettive unità lineari (§. 269), sarà

$$dec.\ cub : pal.\ nap.\ cub :: (1,89)^3 : 5^3 :: 6,751269 : 125$$
$$:: 0,0540102 : 1 :: 1 : 18,5150377$$
$$dec.\ cub : pal.\ sic.\ cub :: (7,749)^3 : 20^3 :: 465,30421.... : 8000$$
$$:: 0,0581630 : 1 :: 1 : 17,193053$$

Da queste proporzioni, ricordandosi che il decimetro cubo corrisponde al litro, ed il palmo cubo siciliano al tomolo siciliano, si dedurranno i seguenti rapporti

$$1^{litro}=0,0540102\ pal.\ cub.\ nap., \quad 1^{pal\cdot c\cdot n}=18^{litri},5150377$$
$$1^{litro}=0,0581630\ pal.\ cub.\ sic., \quad 1^{tomolo\cdot s}=17^{litri},193053;$$

ma un tomolo napolitano eguaglia tre palmi cubici, dunque

$$1^{tom\cdot nap}=55^{litri},5451131, \quad 1^{litro}=0,0180034\ tom.\ nap.$$

il rapporto de' tomoli napolitano e siciliano sarà, per la regola 3, quello de' numeri 55,5451131 e 17,193053 esprimenti i loro valori in litri, o più esattamente e semplicemente quello di 3 pal. cubi nap. al cubo di $\frac{40}{41}$ di palmo, cioè di $3:(\frac{40}{41})^3$, ossia di 206763 : 64000; e quindi

$$1^{tom\cdot nap}=3,320672\ tom.\ sic.; \quad 1^{tom\cdot sic}=0,309533\ tom.\ nap.$$

Il *barile* napolitano, secondo la sua definizione equivale al cilindro iscritto nel parallelepipedo rettangolo rappresentante il tomolo; il rapporto della capacità del tomolo alla capacità del barile sarà perciò quello delle basi de' due solidi, ovvero

il rapporto di un quadrato al cerchio in esso iscritto. Ora è noto dalla Geometria che il quadrato sta al cerchio iscritto come 4 : π , indirando con π il rapporto del diametro alla circonferenza ; che ha per valore 3,14159536.... : dunque il *tomolo* sta al *barile* come 4: 3,14159.... : : 1 : 0,785398163 : : 1,2732395 : 1 , e quindi

$$1^{tom}=1,2732395\ \textit{barili},\ 1^{barile}=0,7853982\ tom=2,3561945\ \textit{palmi cubi}.$$

Se in quest' ultima relazione si sostituirà al tomolo il corrispondente numero di litri , si avrà la capacità del barile espressa anche in litri , cioe

$$1^{barile}=0,785398163\times 55^{litri},5451131=43^{litri},6250298;$$

e si avverte che per ottenere questo valore , esatto sino alla settima cifra decimale , si è dovuto estendere il moltiplicatore 0,785.... sino alla nona per ciò che si è detto nel §. 126.

Il quartaro di Sicilia , essendo eguale in capacità al tomolo , corrisponderà come quello a litri 17,193053 , ed il barile essendo composto di due quartari , eguaglierà litri 34,386106 ; quindi il rapporto del barile siciliano al barile napolitano sarà di 34,386106 : 43 62503 , onde

$$1^{bar\cdot sic}=\frac{34,38\ldots}{43,62\ldots}=0,7882196\ b.n.;\ 1^{bar\cdot nap}=\frac{43,62\ldots}{34,38\ldots}=1,2686819\ b.s.$$

Il *gallone* inglese equivale a litri 4, 543458 . e quindi il rapporto al barile napolitano sarà quello de' numeri 4,543458 : 43,6250298 , per cui si avrà

$$1^{gallone}=0^{bar},104148=6\tfrac{1}{4}\ \textit{caraf. nap.}\ \text{circa};\ 1^{barile}=9^{gal},601724.$$

§. 287. Paragoniamo finalmente i pesi di Napoli e di Sicilia con quelli di Francia e d' Inghilterra.

Conoscendosi il valore del rotolo in parti del chilogrammo, per la regola 1 (§ 281) si è già trovato quello del chilogrammo in parti del rotolo, cioè

$1^{chil}=1,122338$ *rot. nap.* ; e quindi
$100^{chil}=112,2338$ *rot. n.* , e $1000^{chil}=1122,338$ *rot. n.* , ossia
1 *quintale metrico*$=1,122338$ *cantaia nap.* , ed
1 *tonellata metrica*$=11,22338$ *cantaia nap.*

Dall' *Annuaire du Bureau des longitudes* si desume che la libbra inglese detta *troy* equivale a $0^{chil},373096$. Questa libbra si divide in 12 once o in 5760 grani 7000 de' quali formano la libbra maggiore detta *avoirdupois* ; la libbra *avoirdupois* equivale perciò a $0^{ch},373096\times\frac{7000}{5760}=0^{ch},453415$. Con questi dati sarà facile trovare il rapporto fra il rotolo napolitano ed i pesi inglesi , poichè essendo un rotolo eguale a $0^{ch},890997$, per la regola 3 (§ 283) si avrà ,

$$1^{rot\cdot n}=\frac{890997}{373096}=2,388118\ \textit{lib. troy.},\ \text{ed}$$
$$1^{rot\cdot n}=\frac{890997}{453415}=1,965080\ \textit{lib. avoirdupois.}$$

Inoltre un *quintale* inglese è composto di 112 libbre *avoirdupois* ; ma un cantaio napolitano equivale a 196,5080 delle stesse libbre , dunque per l' indicata regola 3 sarà

$$1^{cant\cdot n}=\frac{196,5080}{112}=1,754535\ \textit{quintali ingl.}$$

In fine una *tonellata* inglese componendosi di 20 quintali , un cantaio napolitano eguaglierà $\frac{1,754535}{20}$ *tonel.* , e quindi

$$1^{cant\cdot n}=0,0877268\ \textit{tonellate ingl.};$$

e per la regola 1 (§. 281) si avrà

$$1^{ton\cdot ingl}=\frac{1}{0,0877268}=11,39903\ \textit{cantaia nap.}$$

Con un procedimento affatto simile , dal valore 0,79342 del rotolo di Sicilia in parti del chilogrammo (§. 268) , si caveranno i seguenti rapporti coi pesi metrici , e con gl' inglesi

1 *chilogrammo*$=1,260366$ *rot. sicil.*
$1^{quint\cdot met}=1,260366$ *cant. sicil.* ; $1^{ton\cdot met}=12,60366$ *cant. sic.*
1 lib. *avoirdupois* inglese$=0,571470$ *rot. sic.*
$1^{cant\cdot sicil}=1,56239$ *quint. ingl.* ; $1^{ton\cdot ingl}=12,80092$ *cant. sic.*

Rapporti semplici approssimati di alcune misure dedotti dai rapporti esatti.

§. 288. Un rapporto fra due misure qualsivogliano può tenersi per esatto quando la sua approssimazione si estende sino ad una parte più piccola dell'unità da potersi appena apprezzare coi migliori mezzi fisici che si conoscono. Ma un tal rapporto è quasi sempre molto complicato, e spesso per formarsi un'idea chiara ed immediata della relazione esistente fra due misure, si desidera un rapporto più semplice quantunque meno esatto. Il metodo accennato nel §. 76 di sviluppare una frazione qualunque in frazione continua, e dedurne una serie di frazioni ordinarie più semplici della frazione proposta, può servire all'oggetto. Noi lo abbiamo applicato ai principali rapporti delle misure del Regno colle straniere, ed i risultamenti dei calcoli sono rapportati quì appresso.

40	*piedi fran.* equalgono a	13	*metri*	ERRORE 1 *sopra* 2000
157	idem	51	idem * (a)	
16	*pal. nap.*	13	*piedi fran.*	1 410
97	idem	79	idem	1 28000
361	idem	294	idem *	
9	*pal. nap.*	2	*aune di Parigi*	1 580
292	idem	65	idem *	
38	*pal. nap.*	11	*Yards ingl.*	1 1900
515	idem	149	idem *	
31	*pal. sic.*	8	*metri*	1 7800
957	idem	247	idem *	
9	*tom. nap.*	5	*ettolitri*	1 5300
1064	idem	591	idem *	
13	*tom. nap.*	42	*tom. sic.* *	
51	*barili nap.*	24	*ettolitri*	1 3700
149	idem	65	idem *	
5	*barili nap.*	48	*galloni ingl.*	1 2200
113	idem	1085	idem *	
26	*barili nap.*	33	*barili sic.*	1 2300
562	idem	713	idem *	
1	*moggio nuovo nap.*	7	*are metriche*	1 5300
760	idem	5139	idem *	
25	*moggia nuove nap.*	1	*salma sic.*	1 510
1023	idem	41	idem *	
46	*rot. nap.*	41	*chilogrammi*	1 2900
211	idem	188	idem *	
64	*rot. sic.*	57	*rot. nap.*	1 6400
210	idem	187	idem *	

Rapporti esatti teoretici di alcune misure.

50 *metri* equivalgono a	189 *palmi nap.*
8 *metri*	27 *piedi romani antichi*
25 *metri*	81 *piedi greci olimpici*
7 *palmi nap.*	6 *piedi olimpici*
28 *palmi nap.*	25 *piedi romani antichi*
49 *moggia nuove nap.*	36 *plettri greci antichi*

(a) L'errore dei rapporti segnati con l'asterisco * è sempre minore di 1 sopra 30000 delle misure più piccole, onde essi possono considerarsi esatti nella maggior parte dei casi.

TAVOLA DE' VALORI DI DIVERSE MONETE AL PARI (*)		FRANCHI.	DUC. NAP.
Amsterdam *fiorino* di nuovo conto		2,14	0,504
Austria	*lira* austriaca	0,865	0,204
	fiorino di 3 lire	2,595	0,611
	risdallero di 2 fiorini	5,19	1,221
Bade (Gran ducato) *fiorino*		2,12	0,491
Baviera *fiorino d'impero*, moneta di conto		2,16	0,508
Belgio	*fiorino corrente* antica moneta di conto	1,82	0,428
	franco nuova moneta	1,00	0,235
Copenaguen *risdallero*		5,66	1,332
Costantinopoli	*pezza* di 5 *piastre* del 1811	4,14	0,974
	una *borsa* vale 500 piastre		
Firenze *lira*		0,84	0,198
Francoforte	*risdallero* o *tallero* di 90 kreutzers	3,90	0,918
	fiorino di 60 kreutzers	2,60	0,612
Genova *lira*		0,835	0,196
Grecia antica	*dramma* unità monetaria	0,93	0,219
	mina di 100 dramme	92,68	21,81
	talento d'argento di 60 mine	5561	1308
	talento d'oro di 600 mine	55609	13084
Inghilterra *lira sterlina* di 20 *scellini*		25,208	5,931
Milano	*lira austriaca*	0,865	0,204
	lira antica	0,76	0,179
Napoli *ducato* di 100 *grana*		4,25	1,000
Piemonte	*lira nuova* eguale al *franco*	1,00	0,235
	lira antica	1,18	0,278
Polonia *risdallero*		5,19	1,221
Portogallo *cruzada* nuova di 480 *reali*		2,94	0,692
Prussia *scudo*, *risdallero* o *tallero*		3,71	0,873
Roma *scudo*		5,36	1,261
Roma antica	*sesterzio* o *nummus* unità monetaria	0,20	0,017
	denaro di 4 sesterzi	0,81	0,191
	aureo di 25 denari, o 100 sesterzi	20,38	4,795
	talento grande di 32000 sesterzi	6522	1535
	talento piccolo di 24000 sesterzi	4491	1057
Russia *rublo*		4,00	0,941
Sardegna come il Piemonte.			
Spagna	*reale di plata*	0,543	0,128
	reale di veglione, metà del precedente	0,271	0,064
Venezia *zecchino*		11,95	2,812

(*) Il rapporto delle monete *al pari* è il rapporto delle quantità di metallo fino d'oro e d'argento che contengono, esclusa la *lega*.

INDICE DELLE MATERIE.

SEZIONE PRIMA.

CALCOLO DI OGNI MANIERA DI NUMERI.

CAPO I.

NOZIONI PRELIMINARI.

CAPO II.

OPERAZIONI SU I NUMERI INTERI.

CAPO III.

DELLE FRAZIONI IN GENERALE.

CAPO IV.

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

CAPO V.

FORMAZIONE DEL QUADRATO E DEL CUBO, ED ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA E DELLA RADICE CUBICA DE' NUMERI.

CAPO VI.

DE' NUMERI CONCRETI E COMPLESSI.

SEZIONE SECONDA.

TEORICA DELLE RAGIONI E DELLE PROPORZIONI E SUE APPLICAZIONI.

CAPO I.

TEORICA GENERALE DELLE RAGIONI E PROPORZIONI.

CAPO II.

DELLA REGOLA DEL TRE E DI ALTRE CHE NE DIPENDONO.

CAPO III.

DELLA PROPORZIONE ARITMETICA.

SEZIONE TERZA.

DELLE MISURE.

CAPO I.

DEL SISTEMA METRICO.

CAPO II.

PARAGONE DELLE MISURE.

FINE.

APPENDICE

AGLI

ELEMENTI DI ARITMETICA

DI

F. AMANTE

CONTENENTE LE DIMOSTRAZIONI DI ALCUNE REGOLE ARITMETICHE, LA *TAVOLA* DEI RAPPORTI DELLE PRINCIPALI MISURE STRANIERE ALLE MISURE METRICHE ED A QUELLE DEL REGNO, E LE *TAVOLE DI RIDUZIONE*.

I. *Delle approssimazioni del calcolo numerico.*

§. 1. Quando le operazioni aritmetiche si applicano ad espressioni numeriche molto estese, e, secondo lo scopo che si ha in mira, è determinato il grado di approssimazione che si vuole ne'risultamenti; per conseguire l'approssimazione stabilita è indispensabile l'osservanza di alcune regole molto semplici, senza le quali o si dovrebbe estendere il calcolo al di là del necessario, o limitandolo, si potrebbe andare incontro ad errori da non potersi facilmente prevedere.

§. 2. Noi abbiamo dato nei §§. 125, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 160 degli *Elementi di Aritmetica* le regole di approssimazione riguardanti la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione di radice, ma ci siamo riserbati di esporne in questa *Appendice* le dimostrazioni, le quali eccedevano gli ordinarii confini delle cognizioni aritmetiche.

Due problemi presenta lo studio delle approssimazioni, uno inverso dell'altro: o è stabilita l'approssimazione che si vuol dare ai risultamenti, e si desidera conoscere che estensione debbono avere i dati del calcolo per conseguirla, o i dati del calcolo sono invariabili e si vuol determinare l'approssimazione che avrà il risultamento in conseguenza dell'errore probabile in essi contenuto.

§. 3. *1.° Caso.* Cominciando dalla moltiplicazione, rappresenti p l'unità stabilita per l'approssimazione del prodotto di due fattori indefiniti, e da spezzarsi in modo che il prodotto delle cifre ritenute non contenga un errore maggiore di p. Indichiamo con M, m quei due fattori, considerati esatti, e siano x, y le unità dell'ordine delle ultime cifre da ritenersi nel moltiplicando e nel moltiplicatore per ottenere l'approssimazione p nel prodotto. Supponendo che, nello spezzare i due fattori, le ultime cifre ritenute siano affette del massimo errore che possono

contenore i fattori approssimati saranno espressi da $M \pm \frac{1}{2}x$, $m \pm \frac{1}{2}y$ (*Elementi di Arit.* §. 121), onde si avrà

$$(M \pm \tfrac{1}{2}x)(m \pm \tfrac{1}{2}y) = Mm \pm \tfrac{1}{2}mx \pm \tfrac{1}{2}My \pm \tfrac{1}{4}xy.$$

Dunque, trascurando il termine $\frac{1}{4}xy$ sempre piccolissimo, l'errore del prodotto approssimato sarà $\pm \frac{1}{2}mx \pm \frac{1}{2}My$, e questo dovrà esser minore di p; quindi la condizione da adempirsi nell' assegnare i valori d' x,y sarà espressa da

$$\pm \tfrac{1}{2}mx \pm \tfrac{1}{2}My < p\text{ , ovvero , } \pm mx \pm My < 2p$$

E considerando con lo stesso segno i termini del primo membro di questa ineguaglianza, come potrebbe accadere nel caso più sfavorevole, essa potrà scriversi, $mx + My < 2p$. Questa relazione, contenendo due indeterminate x,y, può esser soddisfatta in diversi modi; ma fra molte soluzioni, per trovarne una di facile applicazione, noi spezzeremo la relazione medesima nelle due,

$$(1) \ldots\ldots mx < p, \quad My < p;$$

ed è chiaro che se saranno soddisfatte queste condizioni, lo sarà pure l'altra $mx + My < 2p$; se non che i valori d' x,y che soddisfanno alle condizioni isolate dovrebbero in qualche caso prendersi più piccoli di quelli che soddisferebbero alla condizione complessiva, ciò che accresce l' approssimazione del prodotto, comunque aumenti un poco il fastidio della moltiplicazione.

Dalle precedenti due ineguaglianze apparisce chiaramente che delle due indeterminate x,y deve esser minore quella che moltiplica il maggior fattore o rappresenta l' approssimazione del più piccolo; e però *dei due fattori della moltiplicazione il più piccolo deve prendersi più esatto*. Avvertiamo poi che le stesse due condizioni $mx < p$, $My < p$, sono state enunciate negli *Elementi di Aritmetica* a forma di maggioranze, cioè $p > mx$, $p > My$, perchè così si sono credute più comode per lo applicazioni.

Debbansi, per esempio, moltiplicare fra loro i due numeri interi 5273 e 22, de' quali le ultime cifre a destra 3, e 2 si suppongono affette del solito errore non maggiore di mezza unità; l'applicazione delle formole (1) farà conoscere che l'errore del prodotto risulta molto più grande di quello di ciascun fattore. In fatti, supponendolo di una unità, le condizioni

$$1 > 22 \times 0{,}01\ ;\ 1 > 5273 \times 0{,}0001$$

mostrano che per conseguire quella approssimazione, il moltiplicatore dovrebbe contenere quattro cifre decimali, e il moltiplicando due, cioè l'errore del primo non dovrebbe esser maggiore di un mezzo diecimillesimo, e quello del secondo non maggiore di mezzo centesimo. Questa conseguenza inaspettata, per chi non ha rivolta mai la sua attenzione al soggetto di cui ci occupiamo, sarà giustificata dal fatto se si aggiungerà a ciascuno dei due numeri proposti una sola cifra decimale, e se ne farà di nuovo il prodotto; il quale si vedrà variare non solo nelle unità, ma nelle decine, nelle centinaia e fino nelle migliaia.

§. 4. Passando alla divisione, rappresentino D,d il dividendo ed il divisore esatti, e q l' unità stabilita per l' approssimazione del quoziente; indicando con x,y le unità dell' ordine delle ultime cifre da

ritenersi nel dividendo e nel divisore per ottenere l'approssimazione convenuta, il valore approssimato dei medesimi due numeri sarà espresso da, $D \pm \frac{1}{2}x, d \pm \frac{1}{2}y$, onde si avrà

$$\frac{D \pm \frac{1}{2}x}{d \pm \frac{1}{2}y} = \left(\frac{D}{d} \pm \frac{x}{2d}\right)\left(1 \pm \frac{y}{2d}\right)^{-1} = \frac{D}{d} \pm \frac{x}{2d} \mp \frac{Dy}{2d^2} \ldots$$

L'errore del quoziente approssimato sarà dunque, $\pm \frac{x}{2d} \mp \frac{Dy}{2d^2}$, che dovrà essere minore di q, e quindi la condizione da adempirsi nell'assegnare i valori di x, y sarà espressa da

$$\pm \frac{x}{2d} \mp \frac{Dy}{2d^2} < q, \text{ ovvero}, \pm \frac{x}{d} \mp \frac{Dy}{d^2} < 2q$$

E considerando con lo stesso segno i termini del primo membro di questa ineguaglianza, come potrebbe accadere nel caso più sfavorevole, si avrà $\frac{x}{d} + \frac{Dy}{d^2} < 2q$. Ma siccome in una divisione, quando è fissata l'estensione che vuol darsi al quoziente, la difficoltà del calcolo dipende soltanto dal divisore, ed è indifferente che il dividendo sia comunque esteso, così noi potremo (in generale) supporlo indefinito, o composto di tante cifre quante bisognano per ottenere il voluto numero di cifre nel quoziente, ed allora l'errore $\frac{1}{2}x$ del dividendo sarà nullo, e la condizione precedente si ridurrà a $\frac{Dy}{d^2} < 2q$; ovvero

$$(2) \ldots\ldots yD < 2D^2q.$$

Alcune volte accade che il dividendo e il divisore di una divisione risultano da operazioni precedenti, ed è utile estenderli soltanto quanto basta per ottenere nel quoziente l'approssimazione che si desidera. Allora non si può supporre indefinito il dividendo, e bisogna ritenere qual è la condizione $\frac{x}{d} + \frac{Dy}{d^2} < 2q$. Ma questa ineguaglianza potrà scomporsi in due, come si è fatto per la moltiplicazione, cioè

$$\frac{x}{d} < q, \ \frac{Dy}{d^2} < q, \ \text{ovvero}$$

$$(3) \ldots\ldots x < dq, \ Dy < d^2q;$$

e sebbene i valori d'x, y, determinati per mezzo delle due condizioni separate, potranno riuscire più piccoli di quelli che si otterrebbero dalla condizione complessiva $\frac{x}{d} + \frac{Dy}{d^2} < 2q$ (che contenendo due indeterminate può esser soddisfatta in diversi modi), non ne soffrirà per ciò l'esattezza del quoziente, o si abbonderà anzi in precauzione.

Se il divisore della divisione proposta fosse terminato ed esatto, allora l'errore $\frac{1}{2}y$ supposto in esso sarebbe nullo, e la sola condizione da osservarsi sarebbe

$$(4) \ldots\ldots x < dq$$

Applichiamo le formole (2), (3) alla divisione di 83,24896...... per 2,134524..., il cui quoziente si voglia esatto fra un centesimo. Supponendo indefinito il dividendo, la formola (2) ci fa conoscere che il di-

visore deve spezzarsi ai millesimi (*Aritm.* pag. 60, §. 127) ed allora il quoziente di 83,24896 per 2,135 risulta eguale a 38,992. Volendo limitare tanto il divisore quanto il dividendo, le relazioni (3) scritte in forma di maggioranze danno,

$$2,1\times0,01>0,01\;;\;2,1\times2,1\times0,01>83,2\times0,0001$$

e però la divisione da eseguirsi sarà quella di 83,25 per 2,1345, ed il quoziente risulterà 39,002. Finalmente, eseguendo la divisione con tutte le cifre che si conoscono nel dividendo e nel divisore, ad oggetto di ottenere un quoziente più esatto, che possa servire a valutare l'approssimazione de'due risultati precedenti, questo quoziente sarà 39,0011. Quindi si vede che gli errori de' quozienti ottenuti applicando le formole (2) e (3) sono stati ambedue minori di 0,01, come si voleva.

§. 5. Indichiamo finalmente con r l'unità stabilita per l'approssimazione della radice quadrata o cubica da estrarsi da un numero N indefinito, il quale voglia spezzarsi in modo che estraendone la radice, questa non contenga un errore maggiore di r. Chiamando x l' unità dell' ordine dell' ultima cifra da ritenersi nel numero proposto, esso, dopo lo spezzamento, potrà contenere l' errore $\pm\frac{1}{2}x$, onde il numero approssimato sarà $N\pm x$, e la differenza fra la radice quadrata esatta e l'approssimata verrà espressa da $\sqrt{N}-\sqrt{N\pm\frac{1}{2}x}$. Or dovendo questa differenza esser minore di r, si avrà la relazione

$$r>\sqrt{N}-\sqrt{N\pm\tfrac{1}{2}x},\ \text{ovvero}$$

$$r>\sqrt{N}-\sqrt{N}.\sqrt{1\pm\frac{x}{2N}}=\sqrt{N}\left\{1-\left(1\pm\frac{x}{2N}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\sqrt{N}\left\{1-1\mp\tfrac{1}{2}.\frac{x}{2N}\ \text{etc.}\right\}$$

$$=\mp\sqrt{N}.\frac{x}{4N}=\mp\frac{x}{4\sqrt{N}}$$

Dunque la condizione da osservarsi sarà

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x<4r\sqrt{N},$$

astrazion fatta dal segno.

Rispetto alla radice cubica si avrà

$$r>\sqrt[3]{N}-\sqrt[3]{N\pm\tfrac{1}{2}x},\ \text{ovvero}$$

$$r>\sqrt[3]{N}\left\{1-\left(1\pm\frac{x}{2N}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}=\sqrt[3]{N}\left\{1-1\mp\tfrac{1}{3}.\frac{x}{2N}\ \text{etc.}\right\}$$

$$=\mp\frac{x\sqrt[3]{N}}{6N}=\mp\frac{x}{6(\sqrt[3]{N})^2};$$

e però la condizione da osservarsi sarà

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ x<6r(\sqrt[3]{N})^2$$

Debba, per esempio, spezzarsi il numero 25,33145 in modo che la sua radice quadrata contenga un errore minore di un diecimilesimo; applicando la formola (5), si avrà,

$$0,001<4\times0,0001\times5,$$

da cui apparisce che basterà ritenere nel quadrato i soli millesimi per ottenere nella radice l'approssimazione domandata. In fatti la radice quadrata di 25,331 è 5,03299, e quella di 25,33145 è 5,03303, le quali due radici differiscono meno di 0,0001.

Se dello stesso numero 25,33145 dovesse estrarsi la radice cubica con un errore minore di un diecimilesimo, la relazione (6) darebbe

$$0{,}001 < 6 \times 0{,}0001 \times (2{,}9)^2 = 0{,}005,$$

e quindi basterebbe limitare il cubo ai millesimi per ottenere nella radice l'approssimazione di 0,0001; il che si può provare ancora estraendo le radici cubiche da 25,331, e da 25,33145, ed osservando che differiscono fra loro meno di un diecimilesimo.

§. 6. 2.° *Caso*. Le regole per calcolare l'errore do' risultamenti delle operazioni dipendentemente dall' errore probabile contenuto nei dati, considerati invariabili, si deducono facilmente da quello esposto qui sopra.

L'errore del prodotto di due numeri, M, m che si suppongono contenere rispettivamente gli errori $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$ si è veduto essere nel massimo $\frac{1}{2}mx + \frac{1}{2}My$. Ma, se si sopprime la virgola nei due fattori essi si cambiano in numeri interi, o le unità x, y dell' ordine delle loro ultime cifre a dritta acquistano lo stesso valore, cioè $x = y = 1$; quindi l'approssimazione del prodotto sarà come segue,

(7)............ *errore del prodotto considerato come numero intero* $= \frac{1}{2}(m + M)$

Un tale errore alternando le ultime cifre a destra del prodotto, tante di esso risulteranno erronee quante ne contiene la semisomma $\frac{1}{2}(m + M)$, onde l'errore sarà minore di un'unità dell' ordine della cifra posta immediatamente a sinistra delle cifre erronee.

Riprendendo l' esempio del §. 3., se i numeri interi 5273, e 22 si suppongono affetti dell' errore di mezza unità nella loro ultima cifra a destra, l'errore del loro prodotto potrà essere $\frac{1}{2}(5173 + 22) = 2647$; cioè minore di un'unità della quinta cifra indicante decine di migliaia.

Ma si può dare all'errore del prodotto di due decimali qualunque una forma che ne faccia conoscere immediatamente l'effettivo valore. Siccome x, y dinotano due unità decimali aventi rispettivamente per denominatori quelli del moltiplicando M e del moltiplicatore m, se le indichiamo con $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{r}$, l'errore $\frac{1}{2}My + \frac{1}{2}mx$ del prodotto si cambierà in $\frac{M}{2r} + \frac{m}{2R}$, e quindi,

(7)'...... *errore del prodotto di due decimali* $= \dfrac{MR + mr}{2Rr}$;

dove i prodotti MR, mr rappresentano il moltiplicando e il moltiplicatore moltiplicati rispettivamente pel proprio denominatore, o sia ridotti a numeri interi con la soppressione della virgola.

Avendosi, per esempio, da moltiplicare fra loro i due decimali 527,095, e 21,97, le cui ultime cifre si suppongono poter contenere l'errore di mezza unità nel massimo, l' errore massimo del prodotto, calcolato con la formola (7)' sarà $\dfrac{527095 + 2197}{200000} = 2{,}64646$; il che

conferma ciò che si è detto a pag. 61 degli *Elementi di Aritmetica*.

§. 7. Rispetto alla divisione, la formola $\frac{\frac{1}{2}x}{d}+\frac{\frac{1}{2}yD}{d^2}$, indicando l' errore massimo del quoziente (§. 4), può cambiarsi in $\frac{\frac{1}{2}(dx+Dy)}{d^2}$; e ponendo, come qui sopra, in luogo d'x,y le frazioni equivalenti $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{r}$, l' espressione del suddetto errore diverrà,

$$(8)\ldots\ldots \textit{errore del quoziente}=\frac{dr+DR}{2rRd^2}$$

dove i prodotti dr,DR, rappresentano il divisore ed il dividendo ridotti a numeri interi con la soppressione della virgola.

Se il divisore si suppone esatto, come può accadere in taluni casi, si ha $y=0$, e quindi l'errore del quoziente diviene $\frac{\frac{1}{2}x}{d}$, ovvero ponendo $\frac{1}{R}$ in luogo di x, sarà

$$(9)\ldots\ldots\ \textit{errore del quoziente quando il divisore è esatto}=\frac{1}{2Rd}$$

Viceversa se il dividendo è esatto ed il divisore approssimato si, avrà

$$(10)\ldots\ldots\ \textit{errore del quoziente quando il dividendo è esatto}=\frac{D}{2rd^2}$$

Le formole (8), (9), (10) applicate al caso in cui il dividendo e il divisore sono numeri interi, e quindi $R=r=1$, divengono

$$(8)'\ldots\ldots \textit{errore del quoziente di due numeri interi}=\frac{D+d}{2d^2}$$

$$(9)'\ldots\ldots \textit{errore del quoziente di due numeri interi quando il divisore è esatto}=\frac{1}{2d}$$

$$(10)'\ldots\ldots \textit{errore del quoziente di due numeri interi quando il dividendo è esatto},=\frac{D}{2d^2}$$

Dovendo dividere uno per l'altro i decimali 3,2451 e 25,327, supposti affetti del solito errore, l'approssimazione del quoziente, calcolata secondo la formola (8), sarà espressa da $\frac{32451+25327}{20000000\times25^2}=\frac{58000}{12500000000}$ $=\frac{1}{200000}$ circa.

La formola (9) in cui si suppone il divisore esatto, applicata alla divisione di 296,7645 per 12,5625, eseguita a pag. 170 degli *Elementi di Aritmetica*, fa conoscere che l'errore del quoziente non può esser maggiore di $\frac{1}{20000\times12,5}=\frac{1}{250000}$, e che quindi è minore di un cen-

tomilesimo, secondo l'approssimazione che si era stabilita per quella operazione.

§. 8. L'approssimazione di una radice quadrata o cubica, dipendentemente dall'errore contenuto nel quadrato o nel cubo, si ottiene immediatamente da ciò che si è detto nel §. 5. Indicando con N il numero da cui si vuol estrarre la radice quadrata o cubica, e con x l'unità dell'ordine dell'ultima sua cifra a dritta, si ha

$$(11)\ldots.. \text{ errore di una radice quadrata} = \frac{x}{4\sqrt{N}}$$

$$(12)\ldots.. \text{ errore di una radice cubica} = \frac{x}{6\left(\sqrt[3]{N}\right)^2}$$

Il numero 25,331, considerato come un quadrato, e supposto affetto del solito errore, darebbe, secondo la formola (11), un errore sulla sua radice eguale a $\frac{0,001}{20} = 0,00005$ e quindi minore di un diecimilesimo. E lo stesso numero, considerato come cubo, darebbe sulla radice l'errore $\frac{0,001}{6(2,9)^2} = \frac{0,001}{50,46} = 0,00002$, cioè anche minore di un diecimilesimo, il che conferma le conclusioni alle quali ci ha condotti nel §. 5 la regola contraria.

§. 9. Quanto abbiamo detto sulle *approssimazioni numeriche* in questo articolo si trovava nella precedente edizione dei nostri *Elementi di Aritmetica* sparso in alcune note, e però mancante del legame necessario per costituirne un corpo di dottrina. Ci è sembrato che l'argomento fosse abbastanza importante per occuparcene di proposito, e crediamo che le regole semplicissime da noi date debbano riuscire utili ai calcolatori, i quali, senza alcuna guida, potrebbero incorrere in gravi errori, o essere obbligati, per evitarli, ad un lavoro molto maggiore del bisognevole.

II. *Sul tempo necessario per raddoppiare* o *triplicare un capitale posto a* moltiplico.

§. 10. Un capitale dicesi posto a *moltiplico* quando gl'interessi che produce non si esigono alle convenute scadenze, ma si cumulano sul capitale per produrre insieme con esso nuovi interessi. Chiamiamo C un capitale qualunque posto a moltiplico, ed i l'interesse annuale sul capitale 100; il frutto del capitale C alla fine del primo anno sarà $\frac{Ci}{100}$, e riunendolo al capitale, questo alla fine del primo anno sarà divenuto $C + \frac{Ci}{100} = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)$. Il frutto del nuovo capitale $C\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ alla fine del secondo anno è $C\left(1 + \frac{i}{100}\right)\frac{i}{100}$, e riunito al capitale dà

$$C\left(1 + \frac{i}{100}\right) + C\left(1 + \frac{i}{100}\right)\frac{i}{100} = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)\left(1 + \frac{i}{100}\right) = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$$

È facile persuadersi che, prolungando questo calcolo, il capitale unito

agl'interessi risulta alla fine del terzo anno $C\left(1+\frac{i}{100}\right)^3$, alla fine del quarto $C\left(1+\frac{i}{100}\right)^4$, e così di seguito.

Ciò premesso, volendo conoscere in quanti anni si raddoppia un capitale C posto a moltiplico ad un dato interesse, è chiaro che, detto x quel numero di anni, bisogna risolvere l'equazione,

$$C\left(1+\frac{i}{100}\right)^x=2C;$$

la quale, dividendo per C e prendendo i logaritmi, si cambia nell'altra,

$$x \log.\left(1+\frac{i}{100}\right)=\log. 2$$

Sviluppiamo in serie il logaritmo del binomio, e moltiplichiamo la serie pel modulo per passare ai logaritmi briggiani; avremo

$$x \times 0,4342945\left(\frac{i}{100}-\frac{i^2}{2(100)^2}+\frac{i^3}{3(100)^3}-\text{etc.}\right)=0,30103\text{, ed}$$

$$xi\left(1-\frac{i}{200}+\frac{i^2}{30000}\right)=\frac{0,30103\times 100}{0,4342945}=69,31472\text{; onde}$$

$$xi=69,3147\left(1-\frac{i}{200}+\frac{i^2}{30000}\right)^{-1}=69,3147+\frac{69,3147\,i}{200}-\frac{69,3147\,i^2}{120000}$$

e finalmente

$$(1)\ldots\ldots\ x=\frac{69,3147}{i}+0,3466-0,0006\,i$$

dove il termine $0,0006i$, qualunque sia il valore dell'interesse i, non può giungere che a qualche centesimo di anno, ed è sempre trascurabile in questa ricerca.

L'espressione $C\left(1+\frac{i}{100}\right)^y=3C$, trattata similmente, darà il seguente valore d'y indicante il numero degli anni in cui il capitale diviene triplo,

$$(2)\ldots\ldots\ y=\frac{109,8612}{i}+0,5493-0,0009\,i$$

Le formole (1), (2), tradotte in linguaggio ordinario, danno origine alla regola seguente riportata a pag. 132 degli *Elementi di Aritmetica*.

Per trovare in quanti anni si raddoppia un capitale posto a moltiplico ad un dato interesse, si dividerà il numero $69\frac{1}{3}$ per quell'interesse, ed al quoziente si aggiungerà $\frac{1}{3}$; e per trovare in quanti anni il capitale diviene triplo, si dividerà il numero 100 per l'interesse, ed al quoziente si aggiungerà $\frac{1}{2}$.

Si potrebbe domandare dopo quanto tempo un capitale diviene doppio o triplo, cumulando su di esso gl'interessi, non già alla fine di ciascun anno, ma alla fine di determinati periodi più lunghi o più brevi di un anno, il che renderebbe più lento o più celere l'aumento del capitale. La regola precedente potrà anche servire a questo calcolo, riflettendo solamente che in quel caso i numeri che se ne otten-

gono non rappresentano anni ma periodi di determinata lunghezza. Così, per sapere dopo quanti anni diviene triplo un capitale posto a moltiplico al 4 per 100 l'anno cumulando su di esso gl'interessi in ogni sei mesi, si osserverà che l'interesse per sei mesi è del 2 per 100, e però il capitale sarà triplicato, secondo la regola, in un numero di periodi di sei mesi indicato da $\frac{100}{2}+\frac{1}{2}=55\frac{1}{2}$, cioè in 27 anni e tre quarti; o più esattamente in anni 27,73905, applicando la formola (2).

III. *Della regola di falsa posizione.*

§. 10. La dimostrazione della regola di *falsa posizione* (pag. 144 dei nostri *Elementi di Aritmetica*) si può far dipendere dalla teorica delle progressioni aritmetiche applicata alla risoluzione dell'equazione di 1.° grado ad una incognita. La forma più generale di questa equazione è,

$$ax+d=0$$

Or se nel primo membro si pone successivamente $x=0$, $x=1$, $x=2$..., esso prenderà i valori seguenti,

per $x=0$ *il primo membro diviene*...... d
$x=1$................................ $a+d$
$x=2$................................ $a+2d$
$x=3$................................ $a+3d$
$x=4$................................ $a+4d$
etc. etc.

Dunque i valori successivi del primo membro formano una progressione aritmetica di cui la differenza è d; e chiamando n il luogo, o l'*indice* di un termine qualunque A_n si avrà

$$A_n=a+(n-1)d..... (1)$$

La risoluzione dell'equazione proposta si riduce perciò a trovare qual è il termine della progressione che va a *zero*, o meglio, l'*indice* di quel termine.

L'espressione del termine generale, trovata qui sopra, dà per un termine A_m, di cui l'indice è diverso da n, il valore analogo,

$$A_m=a+(m-1)d...... (2);$$

e sottraendo una dall'altra le due eguaglianze, sarà

$$A_m-A_n=(m-n)\,d, \text{ da cui}$$

$$d=\frac{A_m-A_n}{m-n}..... (3)$$

Indicando inoltre con x l'indice del termine della progressione che va a zero, sarà pure,

$$A_x=a+(x-1)\,d\text{ , ovvero}$$
$$o=a+(x-1)\,d\text{ , da cui}$$
$$a=d-dx.$$

Questo valore di a introdotto nella (1) darà,

$$A_n = nd - xd\text{, e quindi}$$

$$x = n - \frac{A_n}{d},$$

nella quale eguaglianza sostituendo a d il suo valore espresso dalla (3), si avrà in fine

$$x = n - \frac{A_n(m-n)}{A_m - A_n}\text{, ed}$$

$$x = \frac{nA_m - mA_n}{A_m - A_n} \dots\dots (4)$$

Questo risultamento corrisponde esattamente alla regola di *falsa posizione* conosciuta, la quale si può enunciare così:

« Per risolvere un'equazione o un problema di 1.° grado ad una in-
» cognita, si fanno due supposizioni arbitrarie intorno al valore del
» numero che deve soddisfare all'equazione o alla condizione del pro-
» blema. Si fa indi la pruova di ciascuna supposizione per conoscere
» se soddisfà all'equazione o alla condizione, e non soddisfacendo, si
» notano gli errori che ne risultano. Se i due errori sono della stessa
» specie, cioè tutti due in eccesso o tutti due in difetto, si moltiplica
» ciascuno de' due numeri supposti per l'errore nascente dall'altro, e
» si divide la differenza dei prodotti per la differenza degli errori; e se
» i due errori sono di diversa specie, vale a dire uno in più e l'altro in
» meno, si divide la somma degli indicati due prodotti per la somma
» degli errori ». Nella formola (4) le supposizioni sono n, m e gli errori correlativi A_n, A_m, perchè n, m sono due quantità, o due valori erronei della x, che posti in luogo di essa nell'equazione proposta, in vece di ridurre a zero il primo membro, lo cambiano in A_n, A_m. Applichiamo la regola al seguente problema.

§. 11. Un mercante ha due sole specie di monete cioè *tarì* e *cinque grana*, e vuol pagare un ducato con 17 di siffatte monete; si domanda quanti *tarì* e quante *cinque grana* dovrà riunire? Supponiamo in primo luogo che i *tarì* debbano essere *tre*; le *cinque grana* saranno allora 14, e queste 17 monete in vece di formare un ducato faranno 130 grana, onde la supposizione è falsa, e dà un errore *in più* di 30 grana. Siano due i *tarì*, e quindici le *cinque grana*, ed il valore di queste 17 monete eccederà pure un ducato per 15 grana. Le posizioni e gli errori saranno dunque,

Posizioni	*Errori*
3 *tarì*	30 *in più*
2	15 *in più*

e quindi, moltiplicando in croce questi numeri, il vero numero dei *tarì* sarà dato dall'espressione,

$$x = \frac{2\times30 - 3\times15}{30 - 15} = 1$$

Dunque, per comporre un ducato con 17 monete fra *tarì* e *cinque grana*, bisogna prendere un solo *tarì* e sedici *cinque grana*.

§. 12. La regola di falsa posizione non si limita alla risoluzione delle equazioni di 1.° grado, o dei problemi che ne dipendono, ma si applica con vantaggio ai problemi determinati di qualunque natura, quando si ha l'opportunità e l'avvertenza di scegliere con un qualsivoglia mezzo, o con semplici tentativi, un primo valore dell'incognita abbastanza prossimo al vero; perocchè allora con una seconda supposizione pochissimo differente, ed al più con una terza o una quarta, si giungerà, applicando la regola, ad un valore molto approssimato dell'incognita. Ed in fatti è chiaro che la regola di falsa posizione si può usare sempre che, sostituendo in una funzione qualunque di x una serie di valori per questa incognita che siano in progressione aritmetica, i valori corrispondenti della funzione formino ancor essi una serie di termini che poco si allontana da una progressione aritmetica (§. 10), il che si verifica quando i valori supposti per x differiscono pochissimo fra loro, come se n'ha l'esempio nelle tavole logaritmiche.

Per dare un saggio di simili applicazioni della regola di falsa posizione, proponiamoci di risolvere l'equazione di 6.° grado

$$x^3-\sqrt{x}=1$$

Con pochi tentativi si conosce subito che il valore di x non differisce molto da 1,3. Si facciano dunque le supposizioni,

$x=1,3$. . . . . $x=1,29$, e gli errori saranno

in più. . . .0,056824. . ., *in più*. . . 0,010907.

Ed applicando la regola si trova la differenza dei prodotti eguale a 0,0591251,

e quella degli errori 0,045918; ed infine l'incognita $x=\dfrac{591251}{459180}=1,2876$.

Il quale valore sostituito nell'equazione proposta darà,

$x^3=2,13472976$, e $\sqrt{x}=1,13472464$, e quindi $x^3-\sqrt{x}=1,00000512$, ciò che mostra che l'equazione è soddisfatta con un piccolo errore. Ma se si volesse per x un valore ancora più approssimato si farebbero le due nuove supposizioni $x=1,2876$; $x=1,28759$, ed applicando la regola si otterrebbe l'incognita con dieci cifre decimali.

Con un procedimento analogo si potrà risolvere l'equazione trascendente, $2^x-4x=7$. Fatti alcuni tentativi, si trova che un valore approssimato di x è 4,7, per cui si può supporre successivamente $x=4,7$, $x=4,69$, ed applicando la regola di falsa posizione si ottiene, per mezzo delle tavole logaritmiche, $x=4,6862$, che non contiene un errore più grande di mezza unità dell'ultima cifra decimale.

TAVOLA DI MISURE (*)

Misure lineari per gli usi comuni.	METRI.	PAL. NAP.
Amburgo *piede del Reno*	0,313834	1,186368
Amsterdam *piede*	0,283	1,070
Amsterdam *auna*	0,6903	2.6093
Anversa. *piede*	0,286	1,081
Anversa. *auna* per la seta	0,694	2,623
Anversa. *auna* per la lana	0,684	2.586
Austria *Klafter* o tesa composta di 6 piedi	1,896614	7,169201
Bade (gran ducato) *auna* di 2 *piedi*	0.6000000	2,2680000
Bologna *piede*	0,3801	1,4368
Carrara *palmo* pei marmi.	0,24927	0,94224
Copenaguen *auna*	0,6276	2,3723
Costantinopoli *pic* piccolo per i panni	0,648	2,449
Dresda *auna*	0,5665	2,1414
Ferrara *piede*	0,4039	1,5267
Firenze *braccio*	0,58366	2.20623
Francoforte *auna*	0,5473	2,0688
Genova *palmo*	0,2491	0.9416
Ginevra. *piede*	0,4879	1,8443
Ginevra. *auna.*	1,144	4.324
Grecia *piede*	0,306	1,157
Grecia *piede olimpico* antico $\frac{1}{6000}$ del miglio di 60 a grado	0,30859	1,16647
Grecia *piede pizio* o *delfico* antico, $\frac{4}{5}$ dell' olimpico	0,24687	0,93317
Inghilterra. *piede* composto di 12 *once* o pollici (il *pollice* di 10 *linee*)	0,3047945	1,1521232
Inghilterra. *yard* composto di 3 piedi	0.9143835	3,4563696
Inghilterra. *fathom* o *tesa* di 6 piedi	1,8287670	6,9127392
Lisbona *vara* o *auna*	1,093	4,132
Losanna *tesa* composta di 10 *piedi*.	3,0000000	11,340000
Madrid *vara* o *auna* di Castiglia composta di 3 *piedi*	0,848	3,205
Mantova *piede*	0,4669	1,7649
Milano *braccio* comune	0,594936	2,248858
Milano *piede* agrimensorio	0,435185	1,644999
Modena *piede*	0,5230	1,9769
Monaco *auna*	0,833	3,149
Napoli *palmo* $\frac{1}{7000}$ del miglio di 60 a grado	0,2645503	1,0000000
Padova *piede*	0,3574	1,3510

(*) Le misure riportate con un maggior numero di cifre sono le meglio conosciute.

		METRI.	PAL. NAP.
Parigi	*piede*	0,3248394	1,2278929
	auna (antica misura)	1,188446	4,492326
	metro	1,0000000	3,7800000
Presburgo *auna*		0,5581	2,1096
Prussia	*piede* del Reno	0,313854	1,186368
	auna nuova	0,6669	2,5209
Berlino	*piede* antico	0,310	1,172
	auna antica	0,6677	2,5239
Reggio di Modena *piede*		0,5309	2,0068
Reno *piede* (del) comune a gran parte della Germania		0,313854	1,186368
Roma	*piede*	0,297896	1,126047
	palmo $\frac{3}{4}$ del *piede*	0,223422	0,844535
	piede antico $\frac{1}{5000}$ del miglio di 75 a grado	0,29625	1,11982
	cubito di piedi $1\frac{1}{2}$, corrispondente ad $\frac{1}{10000}$ della lega di 25 a grado	0,44437	1,67972
Russia	*piede* eguale al piede inglese composto di 12 pollici	0,3047945	1,152123
	archina formata di 28 pollici inglesi	0,7111872	2,688288
	sagene composta di 84 pollici o di 7 piedi	2,1335615	8,064862
Sardegna	*palmo*	0,248	0,937
	raso o auna	0,549	2,075
Sicilia *palmo*		0,258098	0,975610
Svezia	*piede*	0,297	1,123
	auna	0,594	2,245
Torino	*piede* detto *liprando* composto di 12 once, ed eguale ad $\frac{1}{4000}$ del *miglio* di 45 a grado	0,5137	1,9418
	raso composto di 14 once del piede	0,5994	2,2657
Varsavia *auna*		0,5846	2,2098
Venezia *piede*		0,3474	1,3132
Verona *piede*		0,3429	1,2962

Misure itinerarie (*).	METRI.	NUMERO di misure contenute in un grado
Allemagna . *miglio* di 15 a grado. . . .	7408	15
Allemagna . *lega* di 12 a grado	9260	12
Amburgo *miglio* di 24000 piedi del Reno, poco diverso dal miglio di 15 a grado . . .	7532	$14\frac{3}{4}$
Austria *miglio* di 24000 piedi austriaci . .	7586	$14\frac{2}{3}$
Bade (Gran ducato) *lega* di 12 $\frac{1}{2}$ a grado . .	8890	$12\frac{1}{2}$
China *miglio* detto *li*	577	$192\frac{3}{5}$
Copenaguen come Amburgo		
Francia . *miriametro* composto di 10 *chilometri*	10000	$11\frac{1}{9}$
Francia . *lega* di 25 a grado	4445	25
Francia . *lega* marina di 20 a grado usata anche in Olanda in Portogallo ed in Polonia	5556	20
Grecia antica *stadio olimpico* di 600 piedi olimpici equivalente ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado . . .	185	600
Grecia antica *stadio pizio* o *delfico* di 600 piedi delfici equivalente ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 75 a grado . .	148	750
Italia MIGLIO DI 60 A GRADO usato come miglio *marino* da molte nazioni, e specialmente dalla Francia dall'Inghilterra e dall'Austria.	1851,9859	60
Inghilterra *miglio* di 1760 *yards*	1609	69
Polonia *miglio* di 20 a grado	5556	20
Portogallo *lega* terrestre di 18 a grado . .	6173	18
Prussia . *miglio* di 24000 piedi del Reno .	7532	$14\frac{3}{4}$
Prussia . *miglio* di 15 a grado prima del 1816	7408	15
Roma *miglio* di 1000 *passi* ciascuno di 5 piedi	1489	$74\frac{5}{8}$
Roma antica *miglio* di 75 a grado, composto di 1000 *passi* ciascuno di 5 piedi antichi.	1481	75
Roma antica *stadio* $\frac{1}{8}$ del miglio, eguale ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado .	185	600
Russia . . *wersta* di 1500 *archine* o di 3500 piedi inglesi	1067	$104\frac{1}{7}$
Russia . . *miglio* finlandico di 10 *werste* .	10668	$10\frac{5}{12}$
Spagna . . *lega* itineraria di 8000 *vare*. .	6784	$16\frac{3}{8}$
Spagna . . *lega* marina di 17 $\frac{1}{2}$ a grado .	6350	$17\frac{1}{2}$
Svezia *miglio* di 10 $\frac{2}{3}$ a grado	10417	$10\frac{2}{3}$
Torino *miglio* piemontese di 4800 *piedi* . .	2466	45
Turchia *miglio* detto *berri*	1670	$66\frac{7}{13}$

(*) In questa tavola si è supposto il quadrante terrestre di 10000724 *metri*, secondo *Delambre*.

Misure superficiali.	ARE.	NUMERO di misure in un miglio quadrato.
Austria *yuchart* di 1600 *klafter* quadrati . .	57,5343	$595\frac{11}{13}$
Grecia antica *plettro* di 10000 *piedi olimpici* quadrati	9,523	$3601\ \frac{1}{5}$
Inghilterra *acre* di 4840 *yards* quadrati . .	40,4671	$847\ \frac{4}{5}$
Madrid . . *fanegada* pei campi di 500 *estadales* quadrati	48,34	$709\ \frac{5}{7}$
Madrid . . *aranzada* pei vigneti di 400 *estadales* quadrati	38,67	$886\ \frac{4}{5}$
(l' *estadale* è una lunghezza di 11 piedi, o di vare $3\frac{2}{3}$) . .		
Milano *pertica* di 24 *tavole* ognuna di 144 *piedi* quadrati	6,5452	$5239\ \frac{1}{2}$
Napoli . . *moggio* nuovo di 10000 *palmi* quadrati	6,99868	4900
Napoli . . *moggio* antico di 48400 *palmi* quadrati	33,8736	$1012\ \frac{2}{3}$
Parigi *arpent* misura antica di 100 *pertiche* quadrate, essendo la *pertica* lineare di 18 piedi	34,18869	$1003\frac{1}{13}$
Prussia *morgen* di 180 *pertiche* quadrate (la *pertica* lineare di 12 *piedi* del Reno) . .	25,5323	$1343\ \frac{3}{7}$
Roma *pezza* di 16 catene quadrate, la catena lineare essendo composta di palmi $57\frac{1}{2}$.	26,4062	$1298\frac{9}{13}$
Roma antica *jugero* di 28800 piedi antichi quadrati	25,2761	$1356\ \frac{3}{4}$
Russia *diciatine* di 2400 *sagene* quadrate .	109,25000	$313\frac{9}{10}$
Sicilia *salma* di 4096 canne quadrate . . .	174,6259	$196\frac{5}{13}$

Misure di capacità.	LITRI.	TOMOLI NAP.	CARAFFE legali napolit.
Grecia antica *anfora attica* equivalente a $\frac{3}{2}$ del cubo di $\frac{24}{25}$ di un *piede* olimpico.	39,000	0,72013	53.639
Inghilterra *gallone* imperiale . . .	4,543458	. . . .	6,249
Bushel di 8 *galloni* per gli aridi .	36,347664	0,654373	. . . .
Quarter di 8 *bushels*	290,781312	5,234988	. . . .
Napoli. *tomolo* per gli aridi eguale a 3 *palmi* cubi napolitani .	55,545113	1,000000	. . . .
Napoli. *barile* pel vino eguale a 3 *palmi* cilindrici (*). . .	43,625030	0,785398	60,000
Parigi. *setier* misura antica composta di 12 *boisseaux* (6 *anf. ant. rom.*)	156,000	2,8085	214,556
Parigi. la TONELLATA di mare, considerata a volume, eguaglia 42 piedi francesi cubici, ossiano metri cubi 1,44.			
Roma antica *anfora* eguale al cubo del *piede* romano antico	26,000	0,46809	35,759
Sicilia. *tomolo* per gli aridi eguale ad un *palmo* cubo siciliano .	17,193053	0,309533	. . . .
Sicilia. *barile* pel vino eguale a 2 *palmi* cubi siciliani. . .	34,386106	0,619066	47,293

(*) Il palmo cilindrico è un cilindro retto avente un palmo di altezza ed un palmo di diametro. La definizione del barile in misure cubiche non presentando un rapporto semplice col palmo, il fu Generale *Visconti* preferì con ragione di definirlo in misure cilindriche, riflettendo ancora che il cilindro forse più del cubo è a cognizione di tutti, e può costruirsi con eguale o maggior facilità. In Francia le stesse misure metriche si costruiscono di forma cilindrica, e le unità cilindriche sono menzionate e adoperate nelle opere di diversi autori.

3

Pesi.	CHILOG.	ROT. NAP.
Amburgo *libbra*	0,4843	0,5435
Amsterdam *libbra* di 16 once	0,494	0,554
Anversa *libbra*	0,47016	0,52768
Austria *libbra*	0,5600	0,6285
Bade (Gran ducato) *libbra*	0,500000	0,561169
Copenaguen *libbra*	0,4994	0,5605
Costantinopoli *oka* o *rotolo* grosso.	1,27	1,43
Dresda *libbra*	0,467	0,524
Firenze *libbra*	0,339542	0,381081
Genova *libbra*	0,317	0,356
Grecia antica *mina attica*, o *libbra* eguale ad $\frac{1}{120}$ del peso di un volume di acqua piovana corrispondente all'*anfora attica*	0,3258	0,3657
Inghilterra . { *libbra troy* composta di 12 once ognuna di 480 grani. . . .	0,373096	0,418740
libbra avoirdupois eguale a 7000 grani troy	0,453415	0,508885
la TONELLATA di mare è composta di 20 quintali ognuno di 112 lib. *avoirdupois* ed equivale a chil. 1015$\frac{2}{3}$, ossiano cant. nap. 11,40		
Lisbona. . { *libbra*	0,4588	0,5149
arrobba peso di 32 *libbre*.		
Losanna *libbra* di 16 once	0,500000	0,561169
Madrid *libbra*	0,460	0,516
Milano . . { *libbra* grossa di 28 once . . .	0,762517	0,855802
libbra piccola di 12 once. . .	0,326793	0,366772
Napoli *rotolo* eguale ad $\frac{1}{12}$ del peso di un volume di acqua distillata corrispondente al cubo di $\frac{5}{6}$ di palmo alla temperatura di 16°$\frac{1}{4}$ centigradi, e sotto la pressione barometrica di 28 pol.	0,890997	1,000000
Parigi *libbra* antica detta *di marco* composta di 16 *once*, ogni oncia di 8 *grossi*, ed ogni grosso di 72 grani.	0,489506	0,549391
Prussia *libbra* eguale ad $\frac{1}{66}$ del peso di un piede cubo del Reno di acqua distillata alla temperatura di 15 gradi di Reaumur.	0,467711	0,524930
Roma . . { *libbra* attuale.	0,389	0,380
libbra antica eguale ad $\frac{1}{80}$ del peso di un *anfora*, o sia di un piede cubo antico di acqua piovana	0,3258	0,3657
Russia *libbra* della zecca	0,409367	0,459448
Sicilia *rotolo*	0,79342	0,89049
Svezia *libbra* detta *victualia*	0,425	0,477
Torino . . { *libbra*	0,368845	0,413969
Rubbo peso di 25 libbre.		
Varsavia *libbra*.	0,405	0,455

Nota sulle misure antiche. La lunghezza del *piede olimpico* dedotta dal *Partenone* o tempio di Minerva in Atene deve considerarsi esatta nel limite di qualche decimo di millimetro, ed essendo altronde verità riconosciuta in Archeologia che l'antico piede romano fosse $\frac{24}{25}$ del piede greco olimpico, con eguale approssimazione risulta determinato il piede romano. Ma le notabili differenze fra alcuni moduli di quest'ultima misura in varie epoche rinvenuti rendevano incerto il giudizio de'dotti, e solo rimosse ogni dubbio l'esame de'monumenti di Ercolano e Pompei, istituito con dotta cura dal chiarissimo nostro concittadino sig. cav. *Cagnazzi*. Questi in una sua importante memoria *Su i valori delle misure e de'pesi degli antichi romani dedotti dagli originali esistenti nel museo di Napoli*, dopo aver ricordate le varie opinioni degli archeologi intorno alla lunghezza dell'antico piede romano, la determina per mezzo delle misure esistenti nel Real Museo Borbonico in due diversi modi cioè, deducendola immediatamente da un mezzo piede di avorio di buona costruzione e ben conservato, e derivandola coll'esperienza e col calcolo da un campione del peso di 10 libbre romane rimasto intatto, sul principio conosciuto che 10 libbre romane equivalevano al peso di un volume di acqua pura corrispondente al *congio* ossia al cubo di mezzo piede: dalla misura diretta risulta il piede romano di 0^{met}, 29622, e dall'altro di 0^{met}, 29624, e questi due valori, che possono considerarsi eguali, si accordano anche benissimo col piede greco nel rapporto incontrastabile di 24 : 25 accennato di sopra.

In una relazione fatta all'Istituto di Francia intorno ad un modulo del piede romano trovato nella foresta di Maulevrier, si fa dipendere l'esatta definizione di quell'antica misura principalmente dal lavoro del cav. *Cagnazzi*, soggiungendosi con lodevole (e rara) sincerità, aver egli risoluto il problema; ma il sig. *Jomard* relatore fa concorrere alla più probabile determinazione del piede romano anche le lunghezze di altri tre moduli ed ottiene per un medio 0^{met}, 29614. Per verità, considerando che gli antichi romani erano privi dei mezzi ottici d'ingrandimento conosciuti dai moderni e non possedevano neanche i mezzi meccanici nella perfezione in cui sono attualmente, sembra difficile che potessero ne'lavori più accurati rispondere delle minime frazioni; per la qual cosa, prendendo per termine di paragone, e come per guida sicura, la determinazione del cav. Cagnazzi, pare che si dovessero insiem con essa coacervare tutte le misure dedotte da altri monumenti antichi che, allontanandosene pochissimo in più o in meno, dovrebbero avere eguale diritto alla fiducia de'dotti. Laonde, valendoci degli stessi dati raccolti dai signori Cagnazzi e Jomard abbiamo preso il medio aritmetico delle cinque seguenti misure poco differenti fra loro e dedotte da moduli ben conservati;

Lunghezza del piede dedotta dalle misure ponderali del Museo di Napoli	. . . .	$0,^{m}29624$
Idem	da un modulo di avorio dello stesso Museo. . .	0, 29622
Idem	da un modulo di bronzo dello stesso	0, 29630
Idem	da un altro modulo del Museo di Parigi . . .	0, 29630
Idem	da un altro del Museo del Collegio romano . .	0, 29614

Con questa operazione si ricade nel valore di 0^{met}, 29624 assegnato dal cav. Cagnazzi.

Da un'altra parte riferisce il sig. Jomard che i signori *Le Roy, Focherot* e *Stuart*, avendo cavata, separatamente ed in epoche diverse, la lunghezza del piede greco dalla misura del Partenone, ne risultò il piede romano di 0^{met}, 29673; 0^{met},29625, 0^{met}, 29584, e per un medio 0^{met}, 29627: quindi incaricandosi anche di questo dato, il piede romano potrebbe portarsi a 0^{met},29625, ossia a millimetri $296\frac{1}{4}$. È notabile che questo stesso valore è dato pure dal diligentissimo sig. *Guerin* de *Thionville* nelle sue tavole pubblicate prima della relazione del sig. Jomard, ma dopo l'opera del cav. Cagnazzi.

Qualunque delle tre misure si adotti, o la 0^{met},29624 determinata dal Cagnazzi, o la 0^{met}, 29614 voluta dal Jomard, o la precedente 0^{met}, 29625, il piede romano potrà sempre teoricamente definirsi *la* 5000*esima parte del miglio di* 75 *a grado*; perocchè un tal miglio essendo eguale a 1481^{m},48, la sua 5000*esima* parte è

$0,^{m}$ 296296, e la differenza di $\frac{1}{17}$, di $\frac{1}{6}$, e di $\frac{1}{22}$ di millimetro tra questa misura e le precedenti, oltre di essere per sè stessa molto piccola, deve considerarsi proveniente dalla imperfetta conoscenza che gli antichi avevano del grado terrestre. Anzi se si adotterà come più probabile, la lunghezza 0^{met},29625, la differenza 0,000046 col valore ottenuto dal grado non eccederà i limiti dell'incertezza che rimane tuttora nelle misure terrestri. Essendo dunque il piede romano la 5000*esima* parte del miglio di 75 a grado, in virtù del rapporto conosciuto di 24 : 25, il piede greco sarà $\frac{5}{24000}$ dello stesso miglio , ovvero $\frac{5}{24000} \times \frac{60}{75} = \frac{1}{6000}$ del miglio di 60 a grado. Questa doppia coincidenza non potendo esser casuale, conferma i valori attribuiti al piede romano ed al greco, e dimostra che dai tempi più antichi le nazioni incivilite derivarono le loro misure dal grado terrestre. Mirabile è poi la derivazione del piede greco, perchè stabilisce un rapporto immediato e semplice tra quella misura ed il minuto secondo di meridiano ; in fatti il minuto primo , equivalente ad un miglio , contiene 60 secondi , o 6000 piedi, e però 100 piedi olimpici equivalgono ad un secondo di arco del meridiano terrestre.

La precedente opinione , che le misure greche e romane fossero dedotte dal grado terrestre, non ha bisogno di pruove, ed emerge spontanea dalla lunghezza assegnata dagli Archeologi al piede greco ed al romano, dietro l'esame degli antichi monumenti. Nulladimeno le ricerche del dotto signor *Gosselin* sulla Geografia antica lo avevano già condotto allo stesso risultamento, ed ultimamente il chiarissimo sig. *Walckenaer*, in una memoria letta all' Istituto di Francia , ha dimostrato che il miglio romano di 75 a grado , composto di 5000 piedi, è giustificato dalle distanze riportate nell'Itinerario di Antonino, e nella Tavola teodosiana per tutte le strade che circondano la città di Roma.

Stabilito il valore dell' unità lineare, risultano determinate tutte le altre misure, di superficie, di capacità, e di peso, giacchè gli antichi, quantunque avessero un commercio molto più limitato de'moderni, conobbero nondimeno la necessità di un ben ordinato sistema metrico (§ 261), e mettevano grande importanza in questa parte di servizio pubblico, sino ad affidarla alla protezione degli dei (*). I rapporti fra l'unità lineare e le misure subordinate, presso gli antichi , ci sono pervenuti con le loro opere, nè intorno ad essi v'ha disparità di opinioni fra i dotti. Nella tavola precedente noi abbiamo riportate le principali misure greche e romane con la loro derivazione dell'unità lineare.

(*) . . . . . *Quam* (anphoram) *ne violare liceret,*
Sacravere Jovi, Tarpejo in monte, quirites.

F. Palemone.

TAVOLE DI RIDUZIONE

I.

RIDUZIONE

di palmi napolitani in palmi siciliani, in palmi romani, in metri, in piedi di Parigi, in aune di Parigi, in yards inglesi, ed in klafter o tese di Vienna.

Pal. nap.	Palmi sicil.	Palmi romani	Metri	Piedi parigini	Aune di Parigi	Yards	Klafter
1	1,025	1,18408	0,264550	0,81440	0,222602	0,289321	0,139486
2	2,050	2,36817	0,529101	1,62881	0,445204	0,578642	0.278971
3	3,075	3,55225	0,793651	2,44321	0,667806	0,867963	0.418457
4	4,1	4,73633	1,058201	3,25761	0,890407	1,157284	0,557942
5	5,125	5,92042	1,322751	4,07202	1,113009	1,446605	0,697428
6	6,150	7,10450	1,587302	4,88642	1,335611	1,735925	0,836913
7	7,175	8,28858	1.851852	5,70082	1,558213	2,025246	0.976399
8	8,2	9,47267	2,116402	6,51523	1,780815	2,314567	1,115884
9	9,225	10,65675	2,380952	7,32963	2,003417	2,603888	1,255370
10	10,25	11,84083	2,645503	8,14403	2,226018	2,893209	1,394856
20	20,5	23,68167	5,291005	16,28806	4,452037	5,786418	2,789711
30	30,75	35,52250	7,936508	24,43210	6,678055	8,679627	4,184567
40	41	47,36353	10,582011	32,57613	8,904074	11,572836	5.579422
50	51,25	59,20416	13,227513	40,72016	11,130092	14,466045	6.974278
60	61,5	71,04500	15,873016	48,86419	13,355110	17,359255	8,369134
70	71,75	82.88583	18,518519	57,00822	15,582129	20,252464	9,763989
80	82	94,72666	21,164021	65,15225	17,808147	23,145673	11.158845
90	92,25	106,56750	23,809524	73,29629	20,034166	26,038882	12,553700
100	102,5	118,40833	26,455026	81,44032	22,260184	28,932091	13,948556

RIDUZIONE

di palmi siciliani, metri, piedi di Parigi, aune di Parigi e yards inglesi in palmi napolitani.

Pal. sicil.	Palmi napol.	Met.	Pal. nap.	Pied.	Palmi napolit.	Aun.	Palmi napolit.	Yàr.	Palmi napolit.
1	0,9756	1	3,78	1	1,2279	1	4,4923	1	3,4564
2	1,9512	2	7,56	2	2,4558	2	8,9847	2	6,9127
3	2,9268	3	11,34	3	3,6837	3	13,4770	3	10,3691
4	3,9024	4	15,12	4	4,9116	4	17.9693	4	13,8255
5	4,8780	5	18,90	5	6,1395	5	22,4616	5	17,2818
6	5,8537	6	22,68	6	7,3674	6	26,9540	6	20,7382
7	6,8293	7	26,46	7	8,5953	7	31,4463	7	24,1946
8	7,8049	8	30,24	8	9,8231	8	35,9386	8	27,6510
9	7,7805	9	34,02	9	11,0510	9	40,4309	9	31,1073
10	9,7561	10	37,80	10	12,2789	10	44,9233	10	34.5637
20	19,5122	20	75,6	20	24,5579	20	89,8465	20	69,1274
30	29,2683	30	113,4	30	36,8368	30	134,7698	30	103,6911
40	39,0244	40	151,2	40	49,1157	40	179,6930	40	138,2548
50	48.7805	50	189	50	61,3947	50	224,6163	50	172,8185
60	58,5366	60	226,8	60	73,6736	60	269,5395	60	207,3822
70	68,2927	70	264,6	70	85,9525	70	314,4628	70	241,9459
80	78,0488	80	302,4	80	98,2314	80	359,3860	80	276,5096
90	87,8049	90	340,2	90	110,5104	90	404,3093	90	311,0733
100	97,5610	100	378	100	122,7893	100	449,2325	100	345,6370

II.

RIDUZIONE

di passi geodetici, o millesimi di miglio, in palmi romani, in metri, in tese, in yards, in klafter di Vienna ed in piedi del Reno.

Pas.	Pal. rom.	Metri.	Tese.	Yards.	Klafter.	P. del Ren.
1	8,28918	1,851986	0,950206	2,025393	0,976470	5,90079
2	16,57837	3,703972	1,900412	4,050786	1,952939	11,80158
3	24,86755	5,555958	2,850617	6,076179	2,929409	17,70236
4	33,15673	7,407944	3,800823	8,101572	3,905878	23,60315
5	41,44592	9,259930	4,751029	10,126965	4,882348	29,50394
6	49,73510	11,111916	5.701235	12,152358	5,858818	35,40473
7	58,02428	12,963901	6,651441	14,177751	6,835287	41,30552
8	66,31347	14,815887	7,601647	16.203144	7.811757	47,20630
9	74,60265	16,667873	8.551852	18,228537	8,788226	53,10709
10	82,89183	18,519859	9,502058	20,253930	9,764696	59,00788
20	165,78367	37,039719	19,004117	40.507861	19,529392	118,01576
30	248,67550	55,559578	28,506175	60,761791	29,294088	177,02364
40	331,56733	74,079437	38,008233	81,015721	39,058784	236,03152
50	414,45917	92,599296	47,510291	101,269651	48,823480	295,03940
60	497,35100	111,119156	57,012350	121,523582	58,588176	354,04728
70	580,24284	129.639015	66,514408	141,777512	68,352872	413,05516
80	663,13467	148,158874	76,016466	162,031442	78,117568	472,06304
90	746,02650	166,678733	85,518524	182,285373	87,882265	531,07092
100	828,91834	185,198593	95,020583	202,539303	97,646961	590,07880

RIDUZIONE

di metri. tese, yards e klafter in passi geodetici.

Met.	Passi.	Tes.	Passi.	Yar.	Passi.	Kla.	Passi.
1	0,539961	1	1,052404	1	0,493731	1	1,024097
2	1,079922	2	2,104807	2	0,987463	2	2,048195
3	1,619883	3	3,157211	3	1,481194	3	3,072292
4	2,159844	4	4.209614	4	1,974925	4	4,096390
5	2,699805	5	5,262018	5	2,468657	5	5,120487
6	3,239765	6	6,314421	6	2,962388	6	6,144584
7	3,779726	7	7,366825	7	3,456119	7	7,168682
8	4,319687	8	8,419229	8	3,949851	8	8,192779
9	4,859648	9	9,471632	9	4,443582	9	9,216877
10	5,399609	10	10,524036	10	4,937313	10	10,240974
20	10,799218	20	21,048071	20	9,874627	20	20,481948
30	16,198827	30	31,572107	30	14,811940	30	30,722922
40	21,598436	40	42,096143	40	19.749253	40	40,963897
50	26,998045	50	52,620178	50	24,686567	50	51,204871
60	32,397654	60	63,144214	60	29,623880	60	61,445845
70	37,797263	70	73,668250	70	34.561193	70	71,686819
80	43,196873	80	84,192285	80	39,498507	80	81,927793
90	48,596482	90	94,716321	90	44,435820	90	92,168767
100	53,996091	100	105,240357	100	49,373133	100	102,409742

III.

RIDUZIONE

di palmi nap. quadrati e cubici in metri quadrati e cubici.

Pal. qu.	*Metri quadrati.*	*Pal. cub.*	*Metri cubici.*
1	0,06999	1	0,018515
2	0,13997	2	0,037030
3	0,20996	3	0,055545
4	0.27995	4	0,074060
5	0,34993	5	0,092575
6	0,41992	6	0,111090
7	0,48991	7	0.129605
8	0,55989	8	0,148120
9	0,62988	9	0,166635
10	0,69987	10	0,185150
20	1,39974	20	0.370301
30	2,09961	30	0,555451
40	2.79974	40	0.740601
50	3,49934	50	0,925752
60	4.19921	60	1,110902
70	4,89908	70	1,296053
80	5.59895	80	1.481203
90	6,29882	90	1,666353
100	6,99868	100	1,851504

RIDUZIONE

di metri quadrati e cubici in palmi nap. quadrati e cubici.

Met. qu.	*Palmi quadrati*	*Met. cub.*	*Palmi cubici.*
1	14,2884	1	54,0102
2	28,5768	2	108,0203
3	42,8652	3	162,0305
4	57,1536	4	216,0406
5	71,4420	5	270,0508
6	85,7304	6	324,0609
7	100.0188	7	378,0711
8	114,3072	8	432,0812
9	128,5956	9	486,0914
10	142,8840	10	540,1015
20	285,7680	20	1080,2030
30	428,6520	30	1620,3046
40	571,5360	40	2160,4061
50	714,4200	50	2700,5076
60	857,3040	60	3240,6091
70	1000,1880	70	3780,7106
80	1143,0720	80	4320,8122
90	1285,9560	90	4860,9137
100	1428,8400	100	5401,0152

RIDUZIONE

di palmi quadrati e cubici in piedi parigini quadrati e cubici.

Pal. qua.	*Piedi quadrati.*	*Pal. cub.*	*Piedi cubici.*
1	0,66325	1	0,54015
2	1,32651	2	1,08031
3	1,98976	3	1,62046
4	2,65301	4	2,16062
5	3,31626	5	2,70077
6	3.97952	6	3,24093
7	4,64277	7	3,78108
8	5.30602	8	4,32124
9	5,96927	9	4,86139
10	6,63253	10	4,40155
20	13,26505	20	10,80310
30	19,89758	30	16,20465
40	26,53010	40	21,60620
50	33,16263	50	27,00775
60	39,79515	60	32,40930
70	46,42768	70	37,81085
80	53,06020	80	43,21240
90	59,69273	90	48,61395
100	66,32525	100	54,01550

RIDUZIONE

di piedi quadrati e cubici in palmi quadrati e cubici.

Pie. qua.	*Palmi quadrati.*	*Pie. cub.*	*Palmi cubici.*
1	1,50772	1	1,85123
2	3,01544	2	3,70264
3	4,52316	3	5,55396
4	6,03089	4	7,40528
5	7,53861	5	9,25660
6	9,04633	6	11,10792
7	10,55405	7	12,95924
8	12,06177	8	14,81056
9	13,56949	9	16,66188
10	15,07721	10	18.51321
20	30,15443	20	37,02641
30	45,23164	30	55,53962
40	60,30885	40	74,05282
50	75,38607	50	92,56603
60	90,46328	60	111,07923
70	105,54049	70	129,59244
80	120,61771	80	148,10564
90	135,69492	90	166,61885
100	150,77213	100	185,13205

Rapporti approssimati.

7 met. quad. = 100 *pal. quad.*, 1 *met. cub.* = 54 *pal. cub.*
65 *piedi quad.* = 98 *pal. quad.*, 100 *pal. cub.* = 54 *piedi cub.*

IV.

RIDUZIONE

di miglia in chilometri ed in leghe; di chilometri in miglia; di leghe in miglia, e di chilometri in leghe.

Mig.	*Chilom.*	*Mig.*	*Leghe.*	*Chil.*	*Miglia.*	*Leg.*	*Mig.*	*Chil.*	*Leghe.*
1	1,85199	1	0,4166...	1	0,539961	1	2,4	1	0,224984
2	3,70397	2	0,8333...	2	1,079922	2	4,8	2	0,449967
3	5,55596	3	1,25	3	1,619883	3	7,2	3	0,674951
4	7,40794	4	1,6666...	4	2,159844	4	9,6	4	0,899935
5	9,25993	5	2,0833...	5	2,699805	5	12,0	5	1,124919
6	11,11192	6	2,5	6	3,239765	6	14,4	6	1,349902
7	12,96390	7	2,9166...	7	3,779726	7	16,8	7	1,574886
8	14,81389	8	3,3333...	8	4,319687	8	19,2	8	1,799870
9	16,66787	9	3,75	9	4,859648	9	21,6	9	2,024853
10	18,51986	10	4,1666...	10	5,399609	10	24	10	2,249837

Rapporti approssimati; 50 *chilometri* equivalgono a 27 *miglia*,
40 *chilometri*.............. a 9 *leghe*.

RIDUZIONE

di miglia quadrate in chilometri quadrati ed in leghe quadrate; di chil. quad. in miglia quad.; di leghe quad. in miglia quad., e di chil. quad. in leghe quad.

M.q.	*Chil. qua.*	*Leghe qu.*	*Ch.q.*	*Mig. qu.*	*L. q.*	*Mig. q.*	*Ch.q.*	*Legh. qu.*
1	3,42985	0,17361...	1	0,291558	1	5,76	10	0,506177
2	6,85970	0,34722...	2	0,583116	2	11,52	20	1,012353
3	10,28956	0,52083...	3	0,874673	3	17,28	30	1,518530
4	13,71941	0,69444...	4	1,166231	4	23,04	40	2,024707
5	17,14926	0,86805...	5	1,457789	5	28,8	50	2,530884
6	20,57911	1,04166...	6	1,749347	6	34,56	60	3,037060
7	24,00896	1,21527...	7	2,040904	7	40,32	70	3,543237
8	27,43881	1,38888...	8	2,332462	8	46,08	80	4,049414
9	30,86867	1,5625	9	2,624020	9	51,84	90	4,555590
10	34,29852	1,73611...	10	2,915578	10	57,60	100	5,061767
20	68,59704	3,47222...	20	5,831156	20	115,2	200	10,123534
30	102,89556	5,20833...	30	8,746733	30	172,8	300	15,185301
40	137,19407	6,94444...	40	11,662311	40	230,4	400	20,247068
50	171,49259	8,68055...	50	14,577889	50	288	500	25,308835
60	205,79111	10,41666...	60	17,493467	60	345,6	600	30,370602
70	240,08963	12,15277...	70	20,409045	70	403,2	700	35,432369
80	274,38815	13,88888...	80	23,324622	80	460,8	800	40,494136
90	308,68667	15,625	90	26,240200	90	518,4	900	45,555903
100	342,98519	17,36111...	100	29,155778	100	576	1000	50,617670

Rapporti approssimati; 2500 *chil. quad.* equivalgono a 729 *mig. quad.*
1600 *chil. quad.* . ... ad 81 *leg. quad.*

V.

RIDUZIONE

di tomoli napolitani in tomoli siciliani, o quartari. ed in ettolitri ; di tom. sic. in tom. nap. ed in ettolitri ; e di ettolitri in tom. nap. ed in tom. sic.

T. n.	Tom. sic.	Ettolit.	T. s.	T. nap.	Ettolit.	Ett.	Tom. nap.	Tom. sic.
1	3,2307	0,5555	1	0,3095	0,1719	1	1,8003	5,8163
2	6,4613	1,1109	2	0,6191	0,3439	2	3,6007	11,6326
3	9,6920	1,6664	3	0,9286	0,5158	3	5,4010	17,4489
4	12,9227	2,2218	4	1,2381	0,6877	4	7,2014	23,2652
5	16,1534	2,7773	5	1,5477	0,8597	5	9,0017	29,0815
6	19,3810	3,3327	6	1,8572	1,0316	6	10,8020	34,8978
7	22,6147	3,8882	7	2,1667	1,2035	7	12,6024	40,7141
8	25,8454	4,4436	8	2,4763	1,3754	8	14,4027	46,5304
9	29,0760	4,9991	9	2,7858	1,5474	9	16,2030	52,3467
10	32,3067	5,5545	10	3,0953	1,7193	10	18,0034	58,1630
20	64,6134	11,1090	20	6,1907	3,4386	20	36,0068	116,3261
30	96,9202	16,6635	30	9,2860	5,1579	30	54,0102	174,4891
40	129,2269	22,2180	40	12,3813	6,8772	40	72,0135	232,6521
50	161,5336	27,7726	50	15,4767	8,5965	50	90,0169	290,8151
60	193,8403	33,3271	60	18,5720	10,3158	60	108,0203	348,9782
70	226,1470	38,8816	70	21,6673	12,0351	70	126,0237	407,1412
80	258,4538	44,4361	80	24,7627	13,7544	80	144,0271	465,3042
90	290,7605	49,9906	90	27,8580	15,4737	90	162,0305	523,4672
100	323,0672	55,5451	100	30,9533	17,1931	100	180,0338	581,6303

RIDUZIONE

di barili napolitani in barili siciliani, ciascuno di 2 quartari, in ettolitri ed in galloni inglesi ; di ettolitri in barili nap. ; e di galloni in caraffe napolitane e caraffe siciliane.

B. n.	Bar. sic.	Ettolit.	Galloni.	Ett.	Bar. nap.	Gal.	Car. nap.	Car. sic.
1	1,2687	0,4363	9,602	1	2,2923	1	6,25	10,57
2	2,5374	0,8725	19,203	2	4,5845	2	12,50	21,14
3	3,8060	1,3088	28,805	3	6,8768	3	18,75	31,71
4	5,0747	1,7450	38,407	4	9,1690	4	25,00	42,28
5	6,3434	2,1813	48,009	5	11,4613	5	31,24	52,85
6	7,6121	2,6175	57,610	6	13,7536	6	37,49	63,42
7	8,8808	3,0538	67,212	7	16,0458	7	43,74	73,99
8	10,1495	3,4900	76,814	8	18,3381	8	49,99	84,56
9	11,4181	3,9263	86,416	9	20,6304	9	66,24	95,13
10	12,6868	4,3625	96,017	10	22,9226	10	62,49	105,70
20	25,3736	8,7250	192,034	20	45,8452	20	124,98	211,41
30	38,0605	13,0875	288,052	30	68,7679	30	187,47	317,11
40	50,7473	17,4500	384,069	40	91,6905	40	249,96	422,82
50	63,4341	21,8125	480,086	50	114,6131	50	312,44	528,52
60	76,1209	26,1750	576,103	60	137,5357	60	374,93	634,23
70	88,8077	30,5375	672,121	70	160,4583	70	437,42	739,93
80	101,4946	34,9000	768,138	80	183,3810	80	499,91	845,64
90	114,1814	39,2625	864,155	90	206,3036	90	562,40	951,34
100	126,8682	43,6250	960,172	100	229,2262	100	624,89	1057,05

VI.

RIDUZIONE

di rotoli napolitani in rotoli siciliani, in chilogrammi ed in lib. troy inglesi; di chil. in rot. nap. ed in rot. sic.; e di rot. sic. in rot. nap.

R. n.	*Rot. sic.*	*Chilog.*	*Lib. troy*	*Chil.*	*Rot. nap.*	*Rot. sic.*	*R. s.*	*Rot. nap.*
1	1,1230	0,8910	2,3881	1	1,1223	1,2604	1	0,8905
2	2,2460	1,7820	4,7762	2	2,2447	2,5207	2	1,7810
3	3,3689	2,6730	7,1644	3	3,3670	3,7811	3	2,6715
4	4,4919	3,5640	9,5525	4	4,4894	5,0415	4	3,5619
5	5,6149	4,4550	11,9406	5	5,6117	6,3018	5	4,4524
6	6,7379	5,3460	14,3287	6	6,7340	7,5622	6	5,3429
7	7,8609	6,2370	16,7168	7	7,8564	8,8226	7	6,2334
8	8,9839	7,1280	19,1049	8	8,9787	10,0829	8	7,1239
9	10,1068	8,0190	21,4931	9	10,1010	11,3433	9	8,0144
10	11,2298	8,9100	23,8812	10	11.2234	12,6037	10	8,9049
20	22,4597	17,8199	47,7624	20	22,4468	25,2073	20	17,8097
30	33,6895	26,7299	71,6435	30	33,6701	37,8110	30	26,7146
40	44,9193	35,6399	95,5247	40	44.8935	50,4147	40	35,6194
50	56,1492	44,5499	119,4059	50	56,1169	63,0183	50	44,5243
60	67,3790	53,4598	143,2871	60	67,3403	75,6220	60	53,4291
70	78,6088	62,3698	167,1682	70	78,5637	88,2257	70	62,3340
80	89,8386	71,2798	191,0494	80	89,7870	100,8293	80	71,2388
90	101,0685	80,1897	214,9306	90	101,0104	113,4330	90	80,1437
100	112,2983	89,0997	238,8118	100	112,2338	126,0366	100	89,0485

RIDUZIONE

di cantaja napolitane in quintali inglesi; di cantaja siciliane in quintali inglesi; di tonellate inglesi in cant. nap. e in cant. sic.; e di tonellate metriche in cant. nap. ed in cant. sic.

C. n.	*Qui. in.*	*C. s.*	*Qui. in.*	*T. in.*	*Cant. n.*	*Cant. s.*	*T. m.*	*Cant. n.*	*Cant. s.*
1	1,755	1	1,562	1	11,40	12,80	1	11,22	12,60
2	3,509	2	3,125	2	22,80	25,60	2	22,45	25,21
3	5,264	3	4,687	3	34,20	38,40	3	33,67	37,81
4	7,018	4	6,250	4	45,60	51,20	4	44,89	50,41
5	8,773	5	7,812	5	57,00	64,00	5	56,12	63,02
6	10,527	6	9,374	6	68,39	76,81	6	67,34	75,62
7	12,282	7	10,937	7	79,79	89,61	7	78,56	88,23
8	14,036	8	12,499	8	91,19	102,41	8	89,79	100,83
9	15,791	9	14,061	9	102,59	115,21	9	101,01	113,43
10	17,545	10	15,624	10	113,99	128,01	10	112,23	126,04
20	35,091	20	31,248	20	227,98	256,02	20	224,47	252,07
30	52,636	30	46,872	30	341,97	384,03	30	336,70	378,11
40	70,181	40	62,495	40	455,96	512,04	40	448,94	504,15
50	87,727	50	78,119	50	569,95	640,05	50	561,17	630,18
60	105,272	60	93,743	60	683,94	768,06	60	673,40	756,22
70	122,817	70	109,367	70	797,93	896,06	70	785,64	882,26
80	140,363	80	124,991	80	911,92	1024,07	80	897,87	1008,29
90	157,908	90	140,615	90	1025,91	1152,08	90	1010,10	1134,33
100	175,453	100	156,239	100	1139,90	1280,09	100	1122,34	1260,37

VII.

RIDUZIONE

di tese, piedi, pollici e linee in metri, e decimali di metro.

Tese	*Metri*	*Piedi*	*Metri*	*Pol.*	*Metri*	*Lin.*	*Millim.*
1	1,94904	1	0,32484	1	0,02707	1	2,256
2	3,89807	2	0,64968	2	0,05414	2	4,512
3	5,84710	3	0,97452	3	0,08121	3	6,767
4	7,79615	4	1,29936	4	0,10828	4	9,023
5	9,74518	5	1,62420	5	0,13535	5	11.279
6	11,69422	6	1,94904	6	0,16242	6	13,535
7	13,64326	7	2,27388	7	0,18949	7	15,791
8	15.59229	8	2,59872	8	0,21656	8	18,047
9	17,54133	9	2,92355	9	0,24363	9	20,302
10	19,49037	10	3,24839	10	0,27070	10	22,558
20	38,98073	20	6,49679	11	0,29777	11	24,814
30	58,47110	30	9,74518	12	0,32484	12	27,070
40	77,96146	40	12,99358	13	0,35191	13	29,326
50	97,45183	50	16,24197	14	0,37898	14	31,582
60	116,94220	60	19,49037	15	0,40605	15	33,837
70	136,43256	70	22,73876	16	0,43312	16	36,093
80	155,92293	80	25,98715	17	0,46019	17	38,349
90	175,41329	90	29,23555	18	0,48726	18	40,605
100	194,90366	100	32,48394	19	0,51433	19	42,861
200	389,80732	200	64,96789	20	0,54140	20	45,117
300	584,71098	300	97,45183	30	0,81210	30	67,675
400	779,61464	400	129,93577	40	1,08280	40	90.233
500	974,51830	500	162,41972	50	1,35350	50	112,791
600	1169,42195	600	194,90366	60	1,62420	60	135,350
700	1364,32561	700	227,38760	70	1,89490	70	157,908
800	1559,22927	800	259,87155	80	2,16560	80	180,466
900	1754.13293	900	292,35549	90	2,43630	90	203,025
1000	1949,03659	1000	324,83943	100	2,70700	100	225.583
2000	3898,07318	2000	649,67886	200	5,41399	200	451,166
3000	5847,10977	3000	974,51830	300	8,12099	300	676,749
4000	7796,14636	4000	1299,35773	400	10,82798	400	902,332
5000	9745,18296	5000	1624,19716	500	13,53498	500	1127,915
6000	11694,21955	6000	1949,03659	600	16,24197	600	1353.498
7000	13643,25614	7000	2273,87602	700	18,94897	700	1579,081
8000	15592,29273	8000	2598,71546	800	21,65596	800	1804,664
9000	17541,32932	9000	2923,55489	900	24,36296	900	2030,246
10000	19490,36591	10000	3248,39432	1000	27,06995	1000	2255,829

VIII.

RIDUZIONE

di metri in tese, e di metri in piedi, pollici e linee.

Met.	Tese.	Met.	Pie.	pol.	lin.	Met.	Pied.	pol.	lin.
1	0,513074	0,001	0.	0.	0,443	1	3.	0.	11,296
2	1,026148	0,002	0.	0.	0,887	2	6.	1.	10,593
3	1,539222	0,003	0.	0.	1,330	3	9.	2.	9,888
4	2,052296	0,004	0.	0.	1,773	4	12.	3.	9,184
5	2,565370	0,005	0.	0.	2,216	5	15.	4.	8,480
6	3,078444	0,006	0.	0.	2,660	6	18.	5.	7,776
7	3,591518	0,007	0.	0.	3,103	7	21.	6.	7,072
8	4,104592	0,008	0.	0.	3,546	8	24.	7.	6,368
9	4,617666	0,009	0.	0.	3,990	9	27.	8.	5.664
10	5,13074	0,01	0.	0.	4,433	10	30.	9.	4,96
20	10,26148	0,02	0.	0.	8,866	20	61.	6.	9,92
30	15,39222	0,03	0.	1.	1,299	30	92.	4.	2,88
40	20,52296	0,04	0.	1.	5,732	40	123.	1.	7,84
50	25,65370	0,05	0.	1.	10,165	50	153.	11.	0,80
60	30,78444	0,06	0.	2.	2,598	60	184.	8.	5,76
70	35,91518	0,07	0	2.	7,031	70	215.	5.	10,72
80	41,04592	0,08	0.	2.	11,464	80	246.	8.	3,68
90	46,17666	0,09	0.	3.	3,897	90	277.	0.	8,64
100	51,3074	0,10	0.	3.	8,330	100	307.	10.	1,6
200	102,6148	0,11	0.	4.	0,763	200	615.	8.	3,2
300	153,9222	0,12	0.	4.	5,196	300	923.	6.	4,8
400	205,2296	0,13	0.	4.	9,628	400	1231.	4.	6,4
500	256,5370	0,14	0.	5.	2,061	500	1539.	2.	8,0
600	307,8444	0,15	0.	5.	6,494	600	1847.	0.	9,6
700	359,1518	0,16	0.	5.	10,927	700	2154.	10.	11,2
800	410,4592	0,17	0.	6.	3,360	800	2462.	9.	0,8
900	461,7666	0,18	0.	6.	7,793	900	2770.	7.	2,4
1000	513,074	0,19	0.	7.	0,226	1000	3078.	5.	4
2000	1026,148	0,20	0.	7.	4,659	2000	6156.	10.	8
3000	1539,222	0,3	0.	11.	0,989	3000	9235.	4.	0
4000	2052,296	0,4	1.	2.	9,318	4000	12313.	9.	4
5000	2565,370	0,5	1.	6.	5,648	5000	15392.	2.	8
6000	3078,444	0,6	1.	10.	1,977	6000	18470.	8.	0
7000	3591,518	0,7	2.	1.	10,307	7000	21549.	1.	4
8000	4104,592	0,8	2.	5.	6,637	8000	24627.	6.	8
9000	4617,666	0,9	2.	9.	2,966	9000	27706.	0.	0
10000	5130,740	1,0	3.	0.	11,296	10000	30784.	5.	4

IX.

RIDUZIONE *di piedi quadrati e cubici in metri quadrati e cubici.*				RIDUZIONE *di metri quadrati e cubici in piedi quadrati e cubici.*			
Piedi quad.	*Metri quad.*	*Piedi cubici.*	*Metri cubi.*	*Metri quad.*	*Piedi quadr.*	*Metri cubici*	*Piedi cubi.*
1	0,1055	1	0,03428	1	9,48	1	29,17
2	0,2110	2	0,06855	2	18,95	2	58,35
3	0,3166	3	0,10283	3	28,43	3	87,52
4	0,4221	4	0,13711	4	37,91	4	116,70
5	0,5276	5	0.17139	5	47,38	5	145,87
6	0,6331	6	0,20566	6	56,86	6	175,04
7	0,7386	7	0,23994	7	66,34	7	204,22
8	0,8442	8	0,27422	8	75,81	8	233,39
9	0,9497	9	0,30850	9	85,29	9	262,56
10	1,0552	10	0,34277	10	94,77	10	291,74
20	2,1104	20	0,68555	20	189,54	20	583,48
30	3,1656	30	1,02832	30	284,30	30	875,22
40	4,2208	40	1,37109	40	379,07	40	1166,95
50	5,2760	50	1,71386	50	473,84	50	1458,69
60	6,3312	60	2,05664	60	568,61	60	1750,43
70	7,3864	70	2,39940	70	663,38	70	2042.17
80	8,4417	80	2,74218	80	758,15	80	2333.91
90	9,4969	90	3,08495	90	852,93	90	2625,65
100	10,5521	100	3,42773	100	947,68	100	2917,39

Riduzione di tese quadrate e cubiche in metri quadrati e cubici, ed inversamente.

T. q.	*Met. qu.*	*T. c.*	*Met. c.*	*M. q.*	*Tes. q.*	*M. c.*	*Tes. c.*
1	3,79874	1	7,40389	1	0,26324	1	0,13506
2	7,59749	2	14,80778	2	0,52649	2	0,27013
3	11,39623	3	22,21167	3	0,78973	3	0,40519
4	15,19497	4	29,61556	4	1,05298	4	0,54026
5	18,99372	5	37,01945	5	1,31622	5	0,67532
6	22,79246	6	44,42334	6	1,57947	6	0,81038
7	26,59120	7	51,82723	7	1,84271	7	0,94545
8	30,38995	8	59,23112	8	2,10596	8	1.08051
9	34,18869	9	66,63501	9	2,36920	9	1,21358
10	37,98744	10	74,03890	10	2,63245	10	1,35064

X.

RIDUZIONE

di grani, grossi *ed* once *della libbra francese detta* di marco *in* grammi *metrici, ed in* trappesi *del rotolo napolitano ; e di libbre di marco in chilogrammi, ed in rotoli.*

Grani	*Grammi*	*Trappesi*	*Libbre*	*Chilogrammi*	*Rotoli*
10	0,53	0,60	1	0,489506	0,549391
20	1,06	1,19	2	0,979012	1,098782
30	1,59	1,79	3	1,468518	1,648173
40	2,12	2,38	4	1,958023	2,197565
50	2,66	2,98	5	2,447529	2,746956
60	3,19	3,58	6	2,937035	3,296347
70	3,72	4,17	7	3,426541	3,845738
72	3,82	4,29	8	3,916047	4,395129
Grossi			9	4,405553	4,944520
1	3,82	4,29	10	4.895058	5,493911
2	7,65	8,58	20	9,790116	10,987823
3	11,47	12,88	30	14,685175	16,481734
4	15,30	17,17	40	19,580234	21,975645
5	19,12	21,46	50	24,475292	27,469556
6	22,94	25,75	60	29,370351	32,963468
7	26,77	30,04	70	34,265409	38,457379
8	30,59	34,34	80	39,160468	43,951290
Once			90	44,055526	49,445202
1	30,59	34,34	100	48,950585	54,939113
2	61,19	68,67	200	97,901169	109,878226
3	91,78	103.01	300	146,851754	164,817338
4	122,38	137,35	400	195,802339	219,756451
5	152,97	171.68	500	244,752923	274,695564
6	183,56	206,02	600	293,703508	329.634677
7	214,16	240,36	700	342,654093	384,573790
8	244.75	274,70	800	391,604678	439,512902
9	275,35	309,03	900	440,555262	494,452015
10	305,94	343,37	1000	489,505847	549,391128
11	336,53	377,71	2000	979,011694	1098,782256
12	367,14	412,04	3000	1468,517541	1648,173384
13	397,73	446,38	4000	1958,023388	2197,564512
14	428,33	480,72	5000	2447,529235	2746,955640
15	458,91	515,05	6000	2937,035082	3296,346768
16	489,51	549,39	7000	3426,540929	3845,737896

Rapporti approssimati ; 11 *rotoli* equivalgono a 20 *libbre*
39 *rotoli*.............. a 71 *libbre*
23 *chilog*.............. a 47 *libbr*.

XI.

RIDUZIONE

di grammi e chilogrammi in libbre e decimali di libbra, ed in libbre, once, grossi, e grani.			*di trappesi e rotoli in libbre e decimali di libbra, ed in libbre, once, grossi, e grani.*		
Gra.	*Libb. e dec.*	*Lib. on. gros. gran.*	*Tra.*	*Lib. e dec.*	*Lib. on. gros. gran.*
1	0,002043	0. 0. 0. 18,8	1	0,001820	0. 0. 0. 16,8
2	0,004086	0. 0. 0. 37,7	2	0,003640	0. 0. 0. 33,5
3	0,006129	0. 0. 0. 56,5	3	0,005461	0. 0. 0. 50,3
4	0,008172	0. 0. 1. 3,3	4	0,007281	0. 0. 0. 67,1
5	0,010214	0. 0. 1. 22,1	5	0,009101	0. 0. 1. 11,9
6	0,012257	0. 0. 1. 41,0	6	0,010921	0. 0. 1. 28,6
7	0,014300	0. 0. 1. 59,8	7	0,012741	0. 0. 1. 45,4
8	0,016343	0. 0. 2. 6,6	8	0,014562	0. 0. 1. 62,2
9	0,018386	0. 0. 2. 25,4	9	0,016382	0. 0. 2. 7,0
10	0,020429	0. 0. 2. 44,3	10	0,018202	0. 0. 2. 23,7
20	0,040858	0. 0. 5. 16,5	20	0,036404	0. 0. 4. 47,5
30	0,061286	0. 0. 7. 60,8	30	0,054606	0. 0. 6. 71,2
40	0,081715	0. 1. 2. 33,1	40	0,072808	0. 1. 1 23,0
50	0,102144	0. 1. 5. 5,4	50	0,091010	0. 1. 3. 46,7
60	0,122573	0. 1. 7. 49,6	60	0,109212	0. 1. 5. 70,5
70	0,143001	0. 2. 2. 21,9	70	0,127414	0. 2. 0. 22,2
80	0,163430	0. 2. 4. 66,2	80	0,145616	0. 2. 2. 46,0
90	0,183859	0. 2. 7. 38,4	90	0,163818	0. 2. 4. 69,7
100	0,204288	0. 3. 2. 10,7	100	0,182020	0. 2. 7. 21,5
200	0,408575	0. 6. 4. 21,4	200	0,364039	0. 5. 6. 43,0
300	0,612863	0. 9. 6. 32,1	300	0,546059	0. 8. 5. 64,5
400	0,817151	0. 13. 0. 42,9	400	0,728079	0. 11. 5. 14,0
500	1,021438	1. 0. 2. 53,6	500	0,910098	0. 14. 4. 35,5
600	1,225726	1. 3. 4. 64,3	600	1,092118	1. 1. 3. 57,0
700	1,430014	1. 6. 7. 3,0	700	1,274138	1. 4. 3. 6,5
800	1,634301	1. 10. 1. 13,7	800	1,456158	1. 7. 2. 27,9
900	1,838589	1. 13. 3. 24,4	900	1,638177	1. 10. 1. 49,4
1*Ch.*	2,042877	2. 0. 5. 35,15	1 *Rot.*	1,820197	1. 13. 0. 70,93
2	4,085753	4. 1. 2. 70,3	2	3,640394	3. 10. 1. 69,9
3	6,128630	6. 2. 0. 33,4	3	5,460591	5. 7. 2. 68,8
4	8,171506	8. 2. 5. 68,6	4	7,280787	7. 4. 3. 67,7
5	10,214383	10. 3. 3. 31,7	5	9,100984	9. 1. 4. 66,7
6	12,257259	12. 4. 0. 66,9	6	10,921181	10. 14. 5. 65,6
7	14,300136	14. 4. 6. 30,0	7	12,741378	12. 11. 6. 64,5
8	16,343012	16. 5. 3. 65,2	8	14,561575	14. 8. 7. 63,5
9	18,385889	18. 6. 1. 28,3	9	16,381772	16. 6. 0. 62,4
10	20,428765	20. 6. 6. 63,5	10	18,201968	18. 3. 1. 61,3
20	40,857530	40. 13. 5. 55,0	20	36,403937	36. 6. 3. 50,7
30	61,286296	61. 4. 4. 46,5	30	54,605905	54. 9. 5. 40,0
40	81,715061	81. 11. 3. 38,0	40	72,807874	72. 12. 7. 29,4
50	102,143826	102. 2. 2. 29,5	50	91,009842	91. 0. 1. 18,7

Uso delle tavole di riduzione

L'uso delle tavole precedenti non può comprendersi meglio che coa qualche esempio.

1.° Debbano ridursi 1524,3 *palmi* napolitani in *piedi* parigini: si dovranno cercare separatamente nella tavola I. i numeri di piedi corrispondenti a 1000 palmi, a 500, a 20 etc., ed aggiungerli insieme; e siccome nella tavola non si trovano 1000 palmi, 500 palmi, e 0,3 palmi, bisognerà dedurli da 100, da 50 e da 3 col conveniente trasporto della virgola, come segue:

per 1000 *palmi*.	814,403 *piedi*
500	407,202
20	16,288
4	3,258
0,3	0,244
1524,3	1241,395

2.° Siano da ridursi 5724,18 metri in piedi di Parigi. Dalla tavola VIII. si avrà,

per 5000 *metri*.	15392^{p}	2^{pp}	8^{l}
700	2154	10	11,2
20	61	6	9,9
4	12	3	9,2
0,18.		6	7,8
5724,18.	17621	6	10,1

3.° Debbano ridursi 87,321 rotoli napolitani in libbre francesi e frazioni complesse di libbra. La tavola XI. darà;

per 40 *rotoli*. . . .	72*lib.*	12*on.*	7*gros.*	29,4*gran.*
40.	72	12	7	29,4
7.	12	11	6	64,5
0,300	0	8	5	64,5
0,020	0	0	4	47,5
0,001	0	0	0	16,8
87,321	158	15	0	36,1

